Séries de Fourier

rq : $f : E \to F$ est linéaire ssi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall u, v \in E$ $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(u | v)$ $\langle u, v \rangle$ $\langle u | v \rangle$

I Produit scalaire, produit scalaire hermitien

Produit scalaire : Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On dit que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E ssi c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive, càd :

1. $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall u \in E, \forall v \in E$
2. $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall u, v, w \in E$
3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ $\forall u, v \in E$
4. $\langle u, u \rangle > 0$ si $u \neq 0_E$

Exemple : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$

$$\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx'+yy'+zz'$$

$$\langle \alpha(x,y,z)+(x',y',z'),(a,b,c)\rangle = (\alpha x+x')a+(\alpha y+y')b+(\alpha z+z')c$$

$$= \langle(\alpha x+x',\alpha y+y',\alpha z+z'),(a,b,c)\rangle$$

$$= \alpha xa+\alpha yb+\alpha zc + x'a+y'b+z'c$$

$$= \alpha\langle(x,y,z),(a,b,c)\rangle+\langle(x',y',z'),(a,b,c)\rangle$$

$$\langle(x,y,z),(x,y,z)\rangle = x^2+y^2+z^2 \geq 0$$

> 0 sauf si $x^2=y^2=z^2=0$

$x=y=z=0$

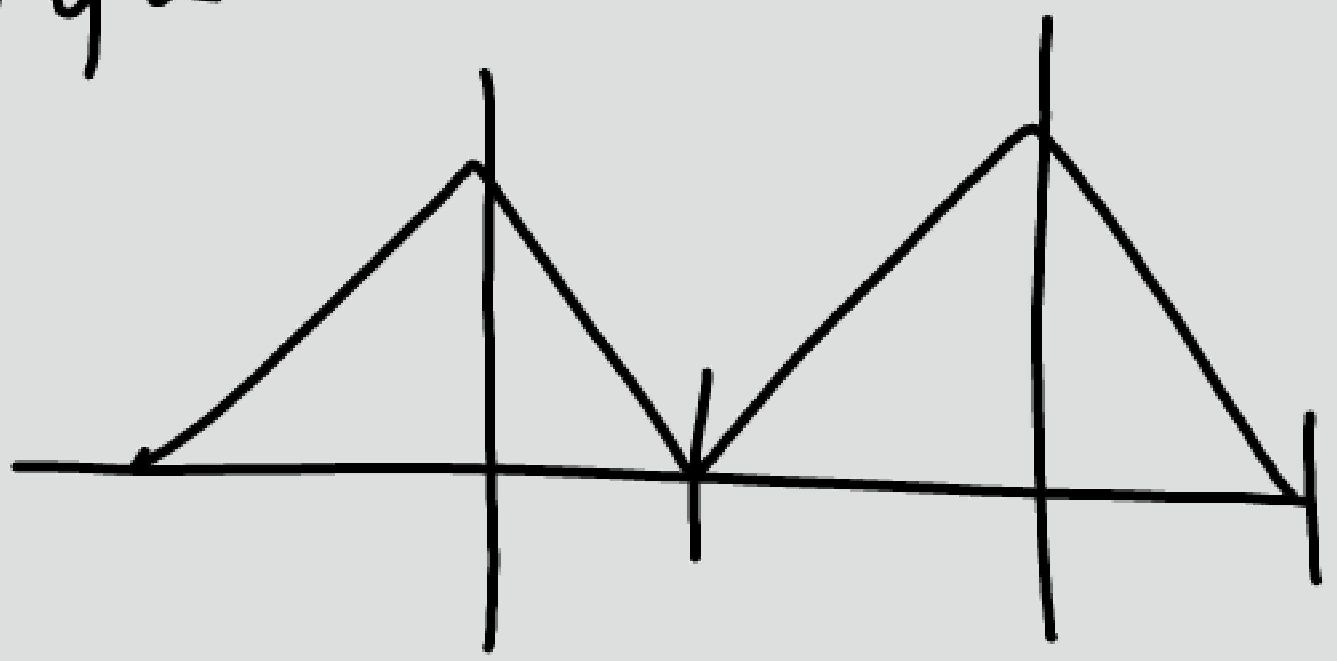
$(x,y,z)=(0,0,0)=0_{\mathbb{R}^3}$

Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

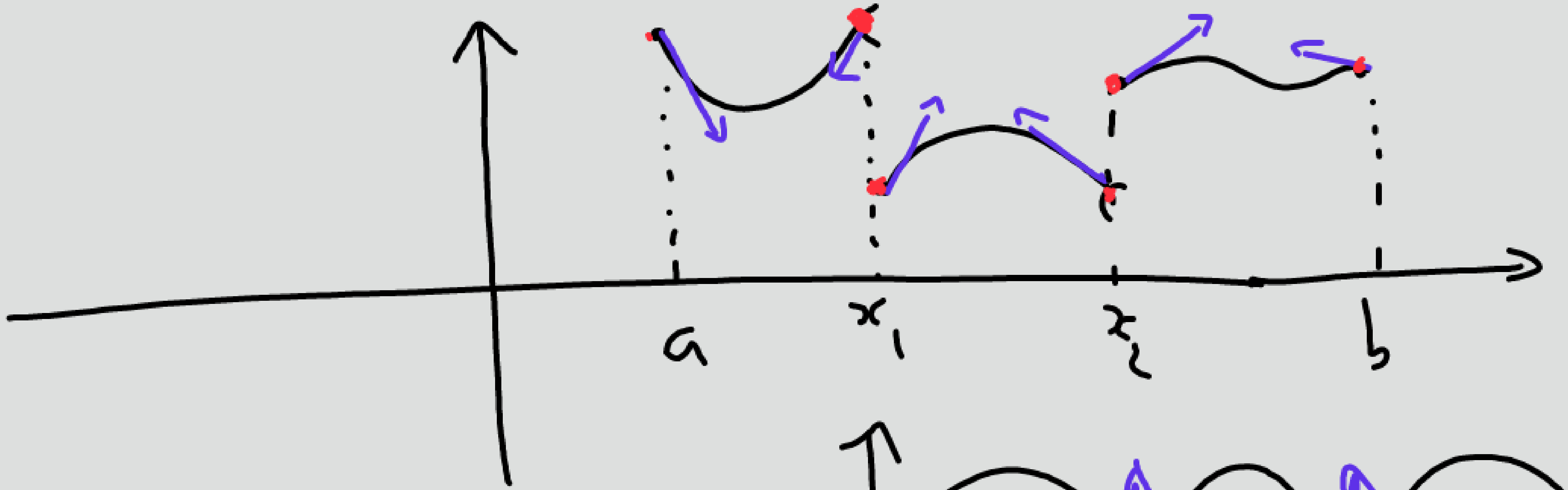
$$< (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

E = espace vectoriel des fonctions T-périodiques de carré intégrable

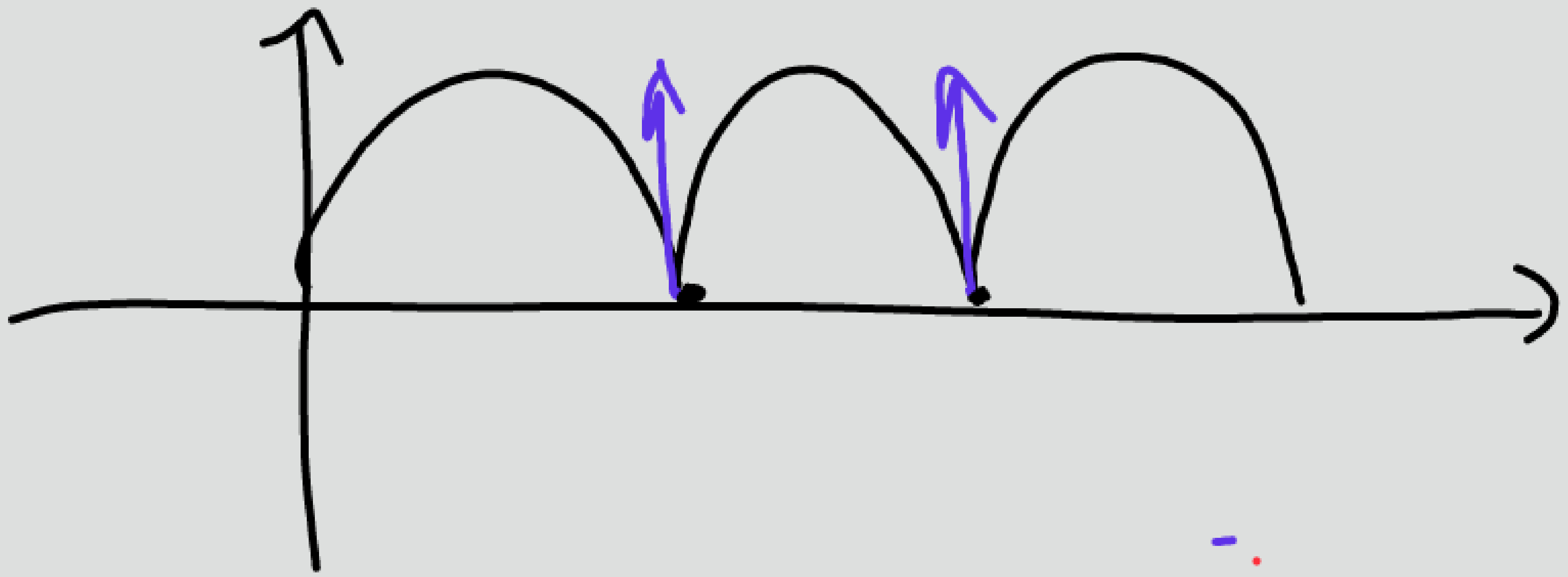
$$< f, g > = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) g(x) \, dx$$



<u>Pour nous</u> : f sera T-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.



f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux



. g n'est pas $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Elle est continue par morceaux

Lorsque E possède un produit scalaire :
une base $\mathcal{B}$ de E est une base orthonormée
ssi :

- $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim E$
- Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} = \delta_{ij}$$

$1 \leq i \leq n$

Si $u \in E$

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base orthonormée de E :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: coordonnées de u dans la base E.

$$\langle u, e_1 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle e_i, e_1 \rangle}_{0 \text{ sauf si } i=1}$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{1} = \alpha_1$$

$$\langle u, e_i \rangle = \alpha_i$$

$$\boxed{u = \sum \alpha_i e_i = \sum \langle u, e_i \rangle e_i}$$

Pour nous : E = ensemble des fonctions T-périodiques

$$B = \{1, \cos(\omega x), \sin(\omega x), \cos(2\omega x), \sin(2\omega x), \dots, \cos(n\omega x), \sin(n\omega x), \dots\} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \{1, \sin(n\omega x), \cos(n\omega x), n \geq 1\}$$

L'objectif de Fourier : écrire

$$f(x) = K + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

Exemple :

$$\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \underbrace{\cos(3\omega x)\sin(2\omega x)}_{\text{impair}}\,dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{\circ} \text{ impaire} = 0$$

$$(f\times g)(-x)$$
$$= f(-x)\,g(-x)$$
$$= f(x)\,(-g(x)) = -f(x)g(x)$$
$$= -(fg)(x)$$

$$\boxed{S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x)}$$

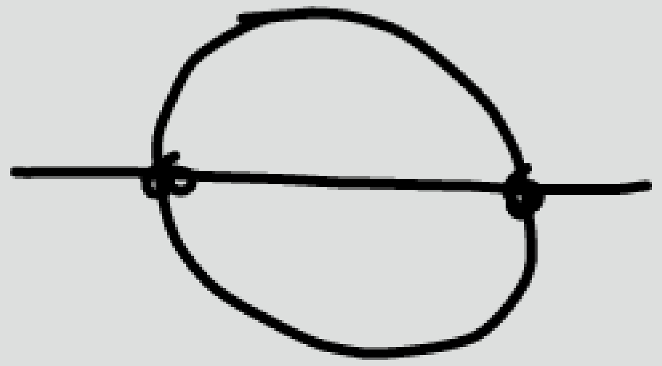
où $a_n = 2\langle f, \cos(n\omega x)\rangle = \boxed{\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\cos(n\omega x)\,dx}$

$b_n = 2\langle f \sin(n\omega x)\rangle = \boxed{\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\sin(n\omega x)\,dx}$

valeur moyenne de f :

$$\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx$$

Exemple :

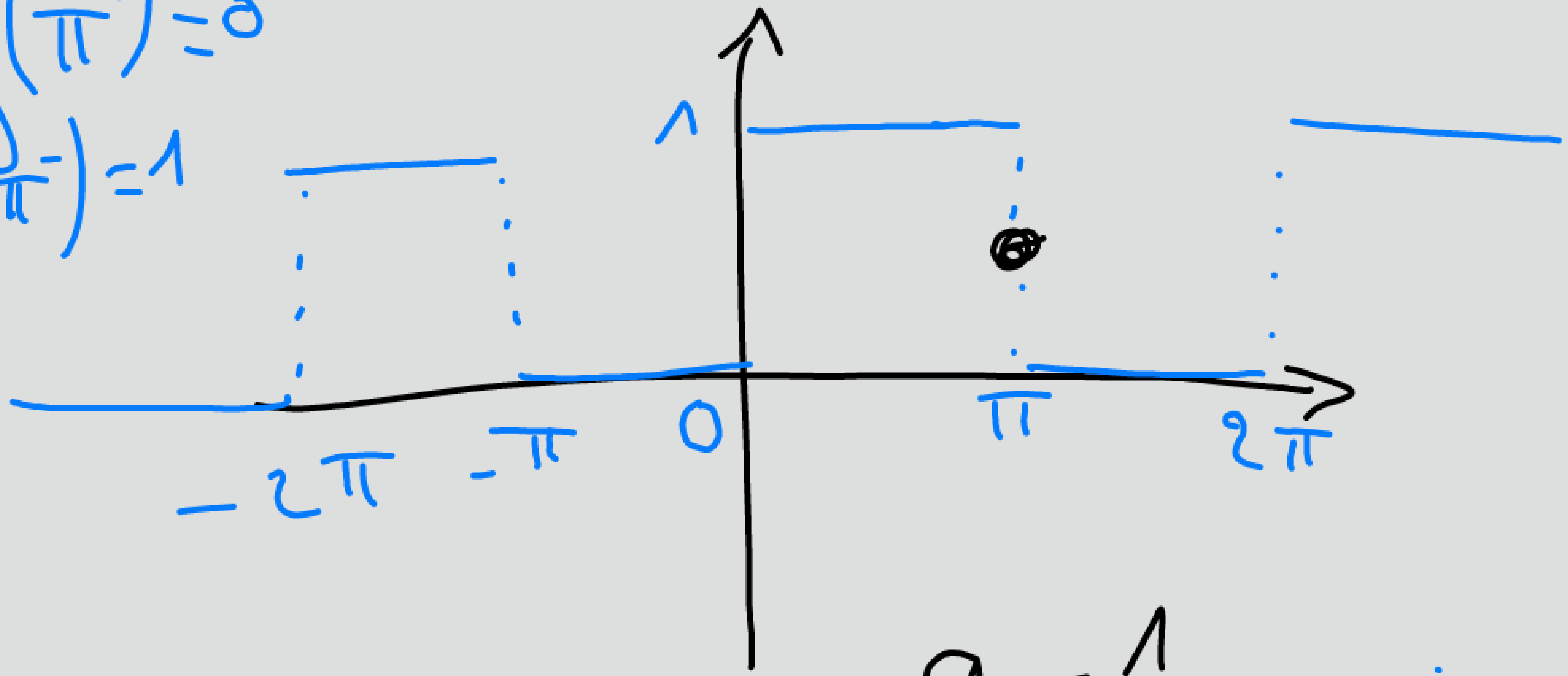


$T = 2\pi$

$\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$f(\pi^+) = 0$

$f(\pi^-) = 1$



$$a_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$$

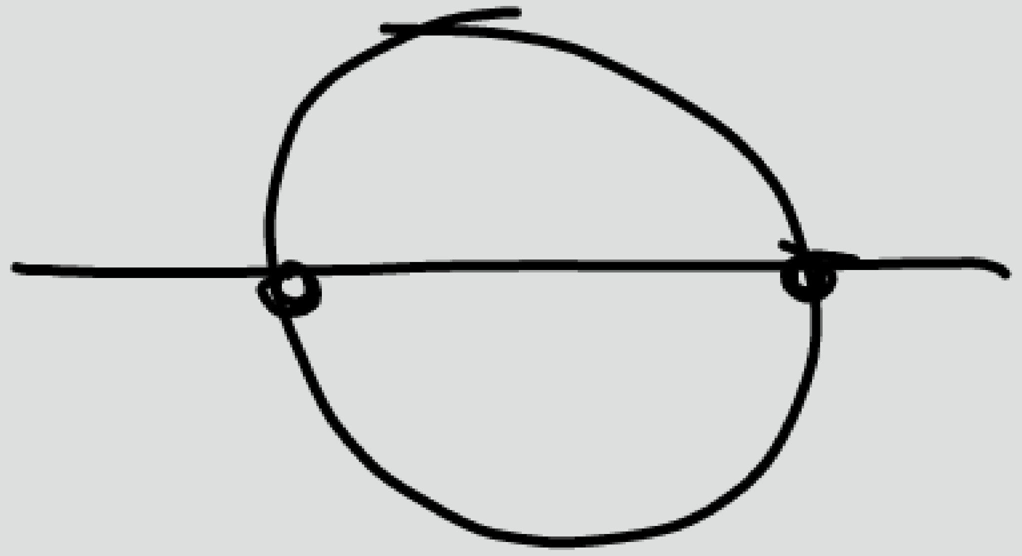
$$= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 + \int_{0}^{\pi} 1\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\sin(n\omega x)\,dx$$



$$= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 + \int_{0}^{\pi} 1\sin(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos 0}{n\pi} = \boxed{\frac{-(-1)^n+1}{n\pi}}$$

$$\boxed{S(f)(x) = \frac{1}{2} + \left(\sum 0\right) + \sum_{n\geq 1} \frac{-(-1)^n+1}{n\pi}\sin(nx)}$$

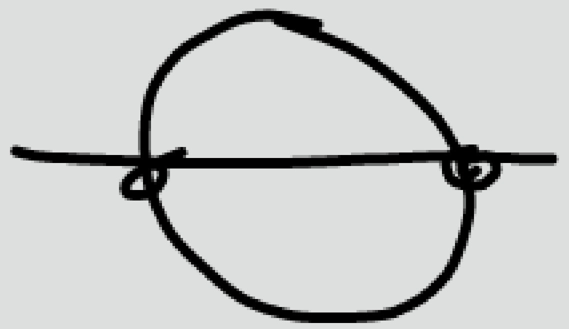
Théorème de Dirichlet

Si f est T-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux : $\forall x \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x)$ convergent et on a :

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}}$$

$$f(x^+) = \lim_{\substack{t \to x \\ >}} f(t)$$

$$f(x^-) = \lim_{\substack{t \to x \\ <}} f(t)$$



I ci : Dirichlet pour f en $x=\pi$:

$$\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum \frac{-(-1)^n+1}{n\pi}\underbrace{\sin n\pi}_{0}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum 0$$

en $x=\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}^+\right)+f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = \qquad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(-1)^n+1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=2k \\ 1 & \text{si } n=1+4k \\ -1 & \text{si } n=3+4k \end{cases}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(1+4k)\pi} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(3+4k)\pi}\times(-1)$$

P