II. ANALYSE TEMPORELLE

1. Définitions
2. Analyse
3. Exemples

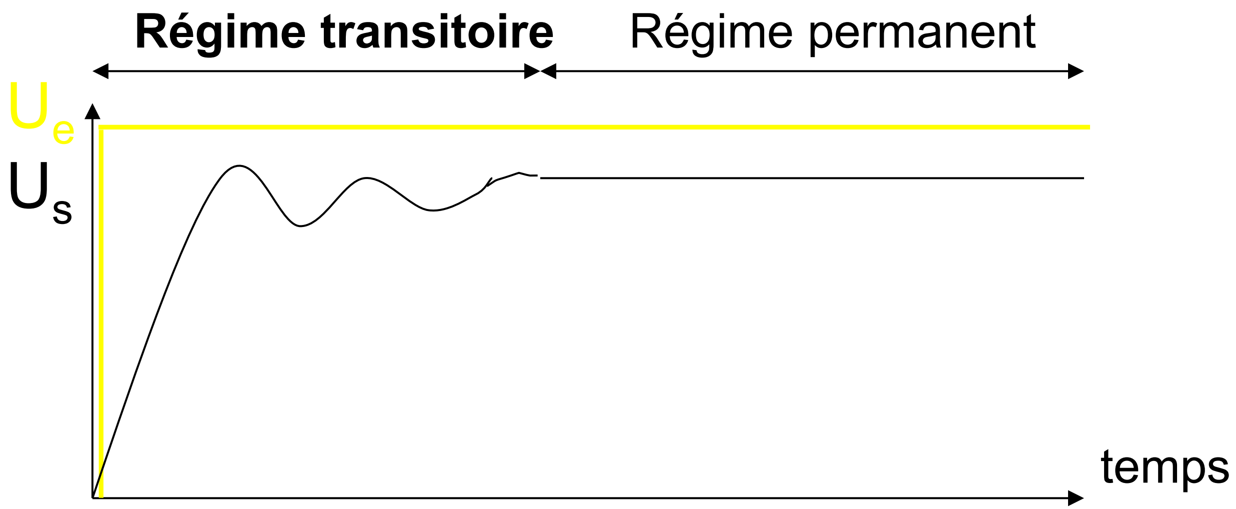
Première Partie

A la fin de ce deuxième chapitre, vous devez être capable de:

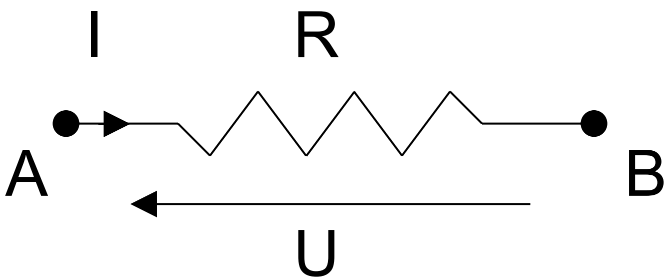
- Identifier et décrire le régime transitoire

- Identifier et résoudre les équations différentielles des systèmes de premier et second ordre

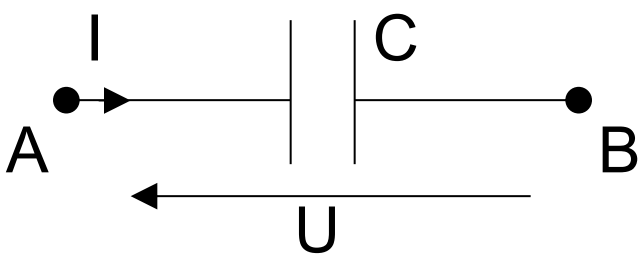
1. Définitions



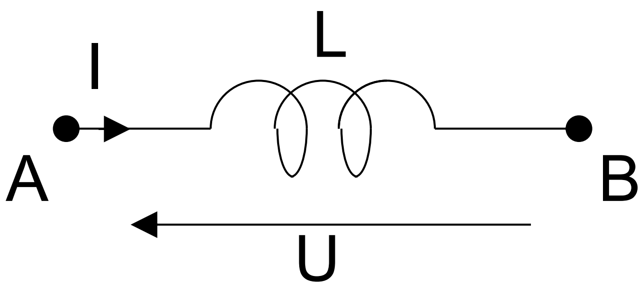
1. Définitions



$$U(t) = R.I(t)$$



$$I(t) = C.\frac{dU(t)}{dt}$$



$$U(t) = L.\frac{dI(t)}{dt}$$

1. Définitions

En régime continu établi - Les grandeurs électriques sont constantes.

En régime périodique établi - Les grandeurs électriques reprennent périodiquement la même valeur.

Conséquence: en régime périodique établi, la valeur moyenne du courant dans une capacité est nulle.

En régime quelconque - D'une façon générale:

- la tension aux bornes d'une capacité ne peut pas subir de discontinuité: $u(t_{0+}) = u(t_{0-})$, quel que soit t_0

- la capacité s'oppose aux variations de la tension à ses bornes et ce d'autant plus que:
  - C est grand;
  - le courant dans la capacité est faible.

1. Définitions

- Topologie du circuit

- Application des lois de Kirchhoff

  ⇨ Mise en équation du système

- Résolution des équations différentielles obtenues

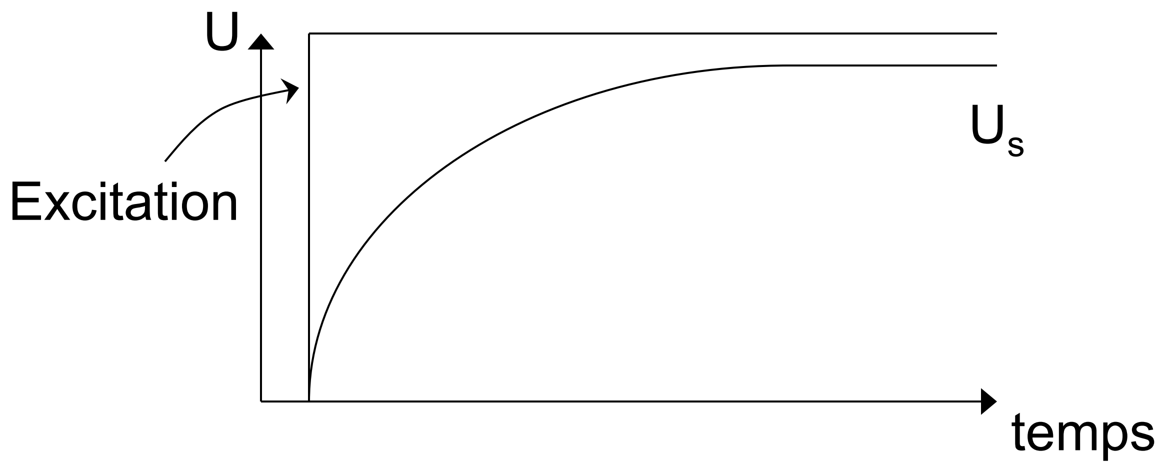
  ⇨ équation différentielle sans second membre (régime libre)

  ⇨ équation différentielle avec second membre (régime forcé)

1. Définitions

Le régime forcé représente la réponse spécifique du système à son excitation seule,

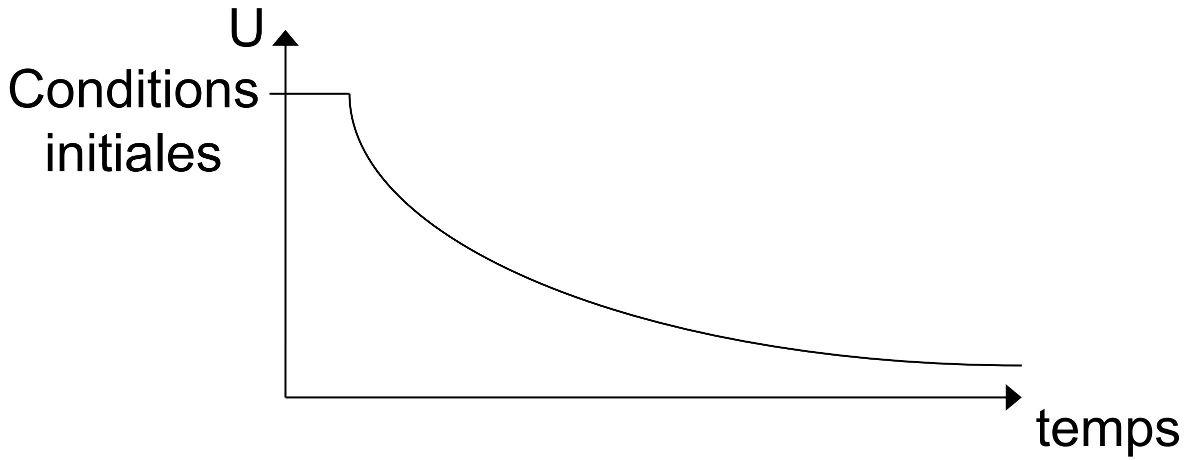
C'est-à-dire lorsque les conditions initiales sont nulles.



1. Définitions

Le régime libre correspond à l'évolution du système laissé à lui-même, sans intervention extérieure,

C'est-à-dire lorsque l'excitation est nulle.



Un circuit du premier ordre est régi par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{ds(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}s(t)=u(t)$$

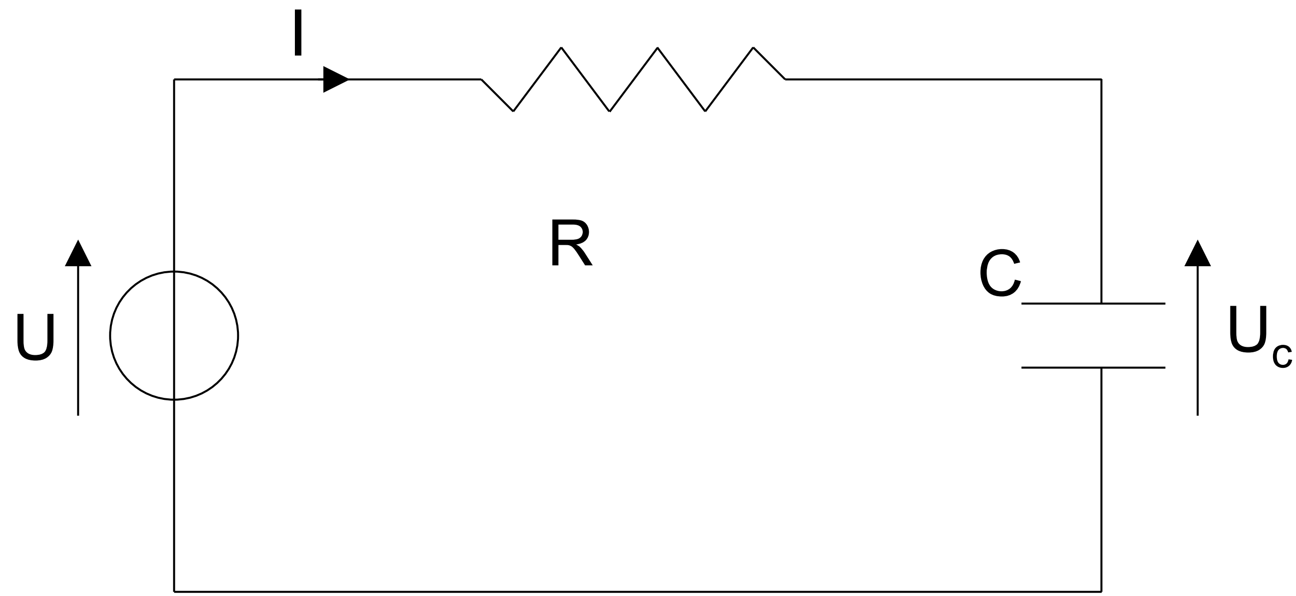
τ est la constante de temps du circuit, homogène à un temps.

$u(t)$ est le second membre qui traduit l' influence extérieure au circuit.

En génie électrique, la solution s(t) recherchée est très souvent:

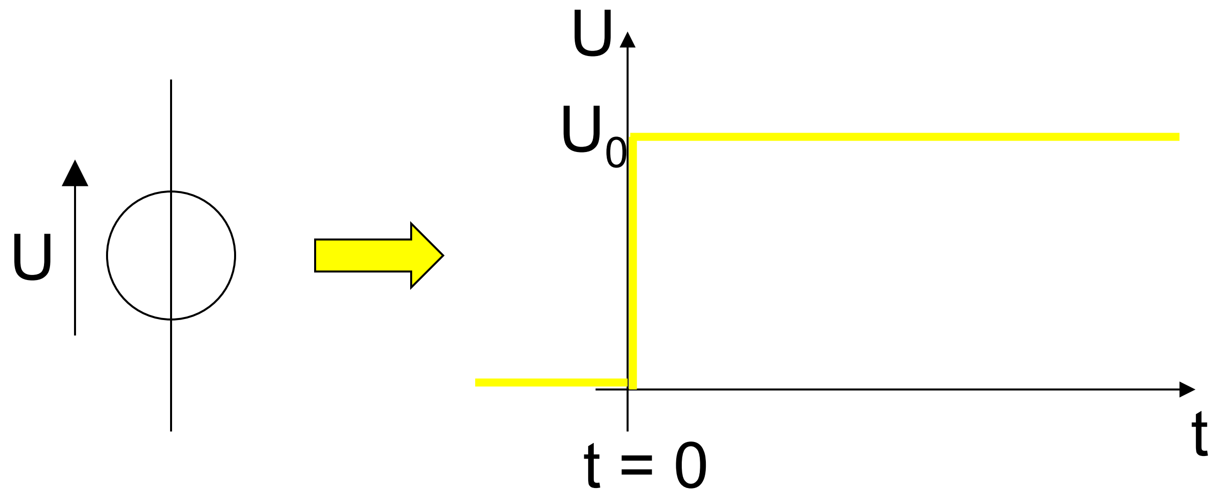
- Une tension u(t) (cas d'un circuit RC)
- Un courant i(t) (cas d'un circuit RL)
- Une vitesse de rotation Ω(t) (cas d'une machine à courant continu)

Cas d'un circuit RC :



Mise en équation :

$U(t) - R.I(t) - U_c(t) = 0$ ⇨ $$U(t) = RC.\frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t)$$



Pour t>0, $$U_0 = RC.\frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t)$$

Équation différentielle du premier ordre

Solution générale de l'équation : $$U_c(t) = A.\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + B$$

$$U_c(t) = A.\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + B$$

Solution Générale $s_1(t)$ de l'Equation Sans Second Membre (SGESSM)

Solution Particulière $s_2(t)$ de l'Equation Avec Second Membre (SPEASM)

Conditions aux limites :

- Pour t = 0, u(0) = A+B = 0

⇒ A=-B

- Pour t -> ∞, $u(t) = U_0$

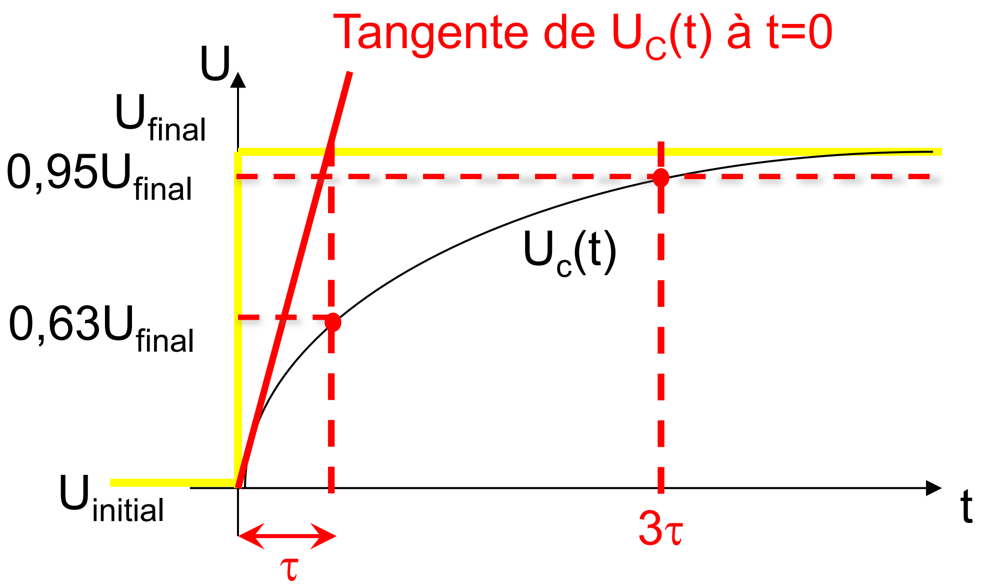
⇒ $B = U_0$ ⇒ $A = -U_0$

La solution s'écrit :

$$U_c(t) = U_0.\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

On définit la constante de temps du circuit : $\tau = RC$

Cas d'un circuit RC : Formule générale



Lorsqu'on applique un échelon de tension à un circuit RC, on a :

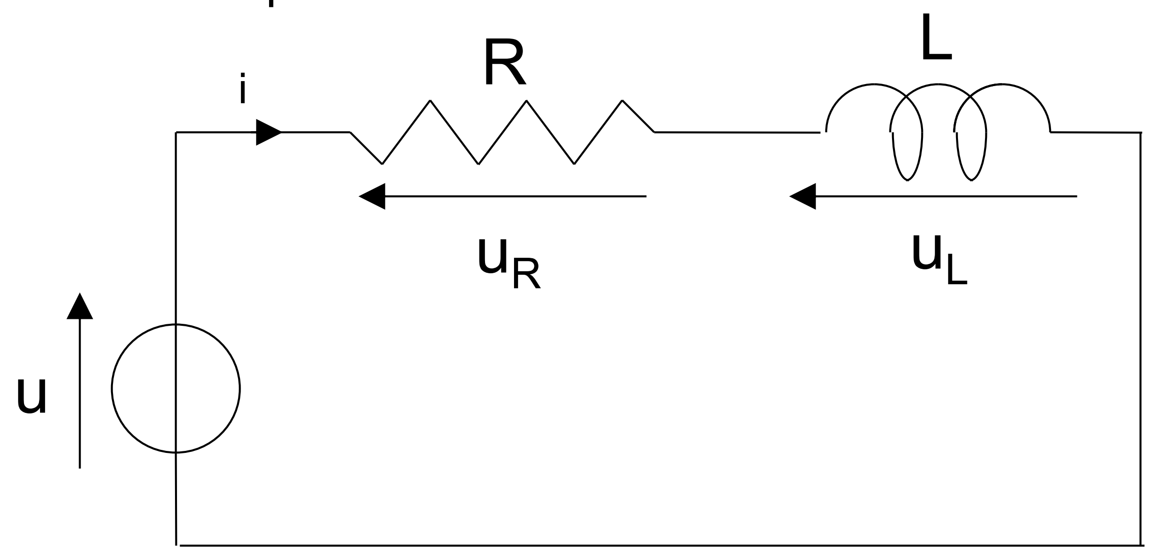
$$U_C(t) = \underbrace{U_{final}}_{} - \underbrace{\left(U_{final} - U_{initial}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}_{}$$

Régime **permanent** (ou **forcé**)

Régime **transitoire**(ou **libre**)
Disparaît ou bout de 3 à 5τ

Cas d'un circuit RL : Formule générale

Équations électriques



$$u - u_R + u_L = 0$$

$$u = u_R + u_L$$

$$u = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\frac{u}{R} = R + \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt}$$

Équation différentielle en i(t):

$$\boxed{\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{u}{R}}$$

Rappel: Équation différentielle d'un système de 1er ordre est:

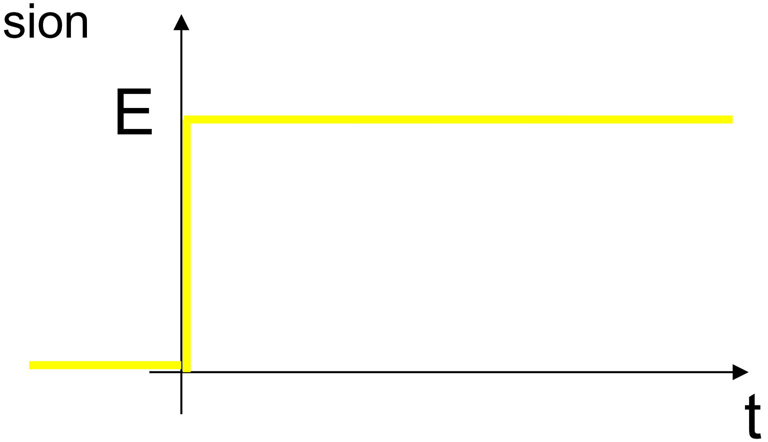
$$\tau \frac{dx}{dt} + x(t) = a(t)$$

Par identification on détermine la constante de temps τ du notre système: $\tau = \frac{L}{R}$

Cas d'un circuit RL : Réponse à un échelon de tension

$u(t)$=E

$$\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$



Cas d'un circuit RL : Réponse à un échelon de tension

Rappel: Les solutions de l'équation différentielle

$$\tau \frac{dx}{dt} + x(t) = a(t)$$

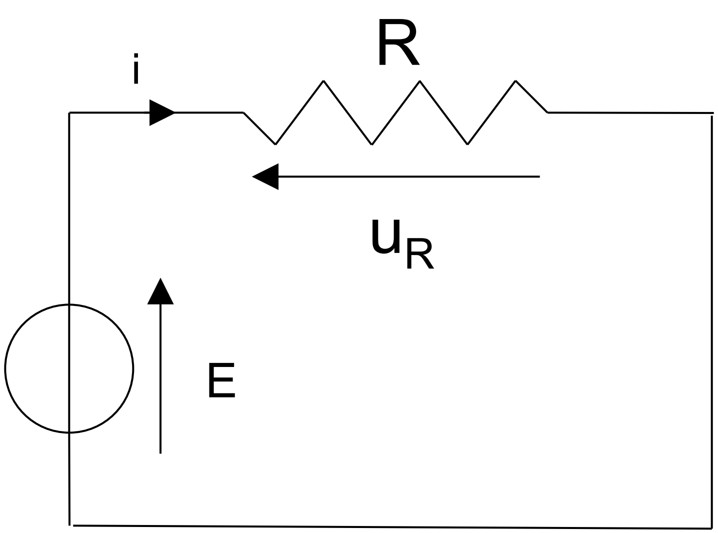
sont de la forme:

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + x_p$$

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + i_p$$

i_p Solution particulière qui correspond à la valeur de *i* en régime permanent

Lorsque le régime permanent est atteint, *t*>>5τ, on peut considérer que la bobine sera complètement chargée



Une bobine chargée este équivalente à un fil. Le courant i_p dans la bobine c'est le courant en régime permanent.

$E - u_R$=0

$E = u_R = R \cdot i_p = 0$ => $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$

$$i_p = \frac{E}{R}$$

Cas d'un circuit RL : Réponse à un échelon de tension

Pour déterminer la constante A on utilise la propriété de **la continuité du courant dans la bobine.**

Initialement la bobine étant déchargée, le courant était null.

$$i(0^-) = 0$$

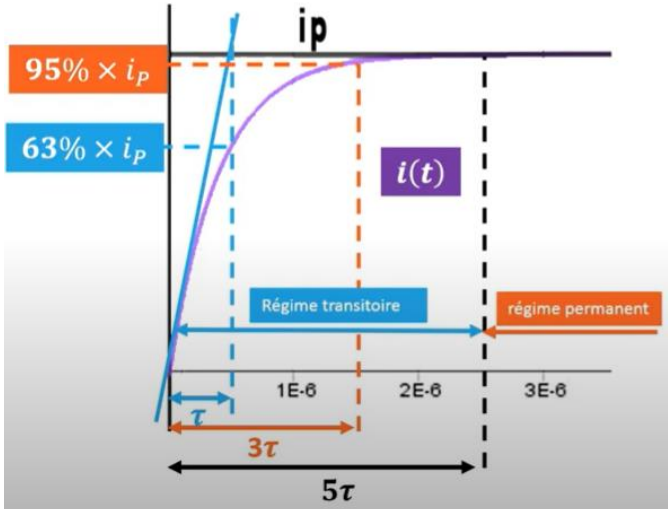
A $t = 0^+$ l'échelon de tension *E* est appliquée

$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

$$i(0^+) = Ae^{-\frac{0}{\tau}} + \frac{E}{R} = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Cas d'un circuit RL : Réponse à un échelon de tension



$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{E}{L}$$

$\tau = \dfrac{L}{R}$: temps de relaxation ou constante de temps du circuit R,L.

On distingue trois zones :

$t < 0$, régime permanent $i = 0$

$t >> \tau$, régime permanent $i \approx \dfrac{E}{R}$

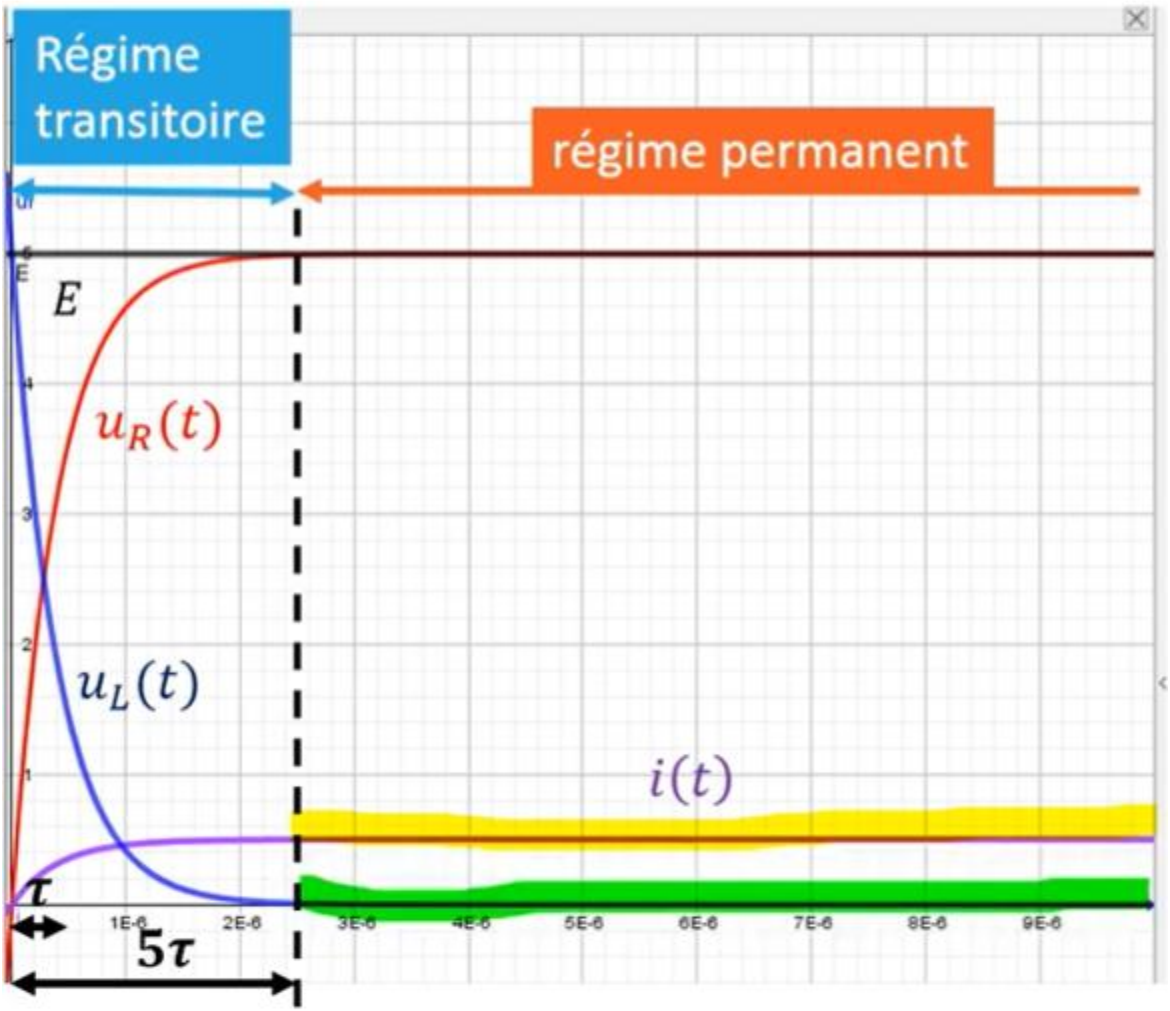
$0 < t < 3\tau$, régime transitoire

Pour $t = \tau$, $i(\tau) = \dfrac{E}{R}(1 - \dfrac{1}{e}) = 63\% \times \dfrac{E}{R}$

Pour $t = 3\tau$, $i(3\tau) = 95\% \times \dfrac{E}{R}$

τ est la durée caractéristique du régime transitoire.

Cas d'un circuit RL : Visualisation des grandeurs *i(t); $u_R(t)$ et $u_L(t)$*



$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R = R \cdot i(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$t \ll 5\tau$ *régime transitoire*

$t \gg 5\tau$ *régime permanent*

La bobine et chargée à 99% $i \approx i_p$

$u_L = 0$

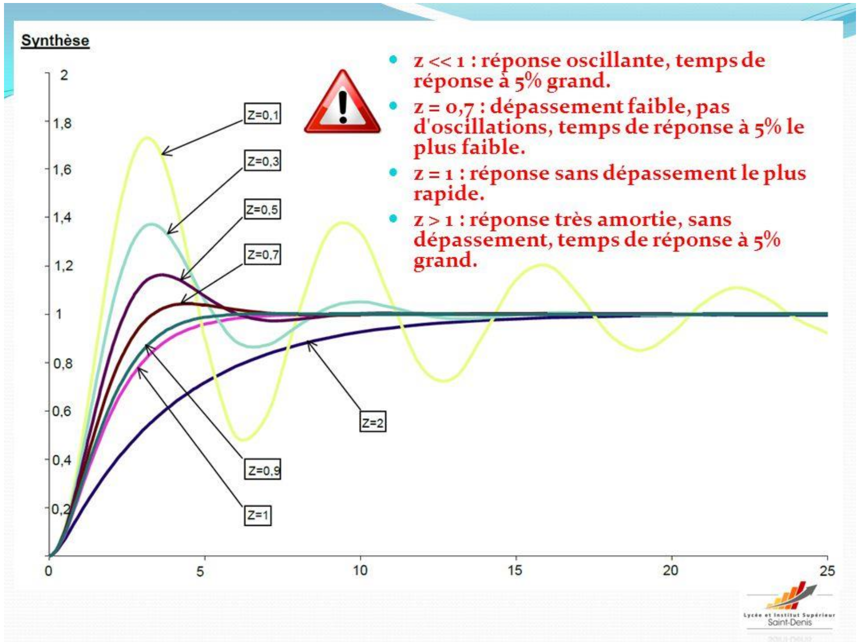
Un système linéaire du **second ordre** répond à **l'équation différentielle** suivante:

ω_0 est la pulsation propre du circuit (rad.s^{-1}),

z est le coefficient d' amortissement du circuit (sans unité et ≥ 0),

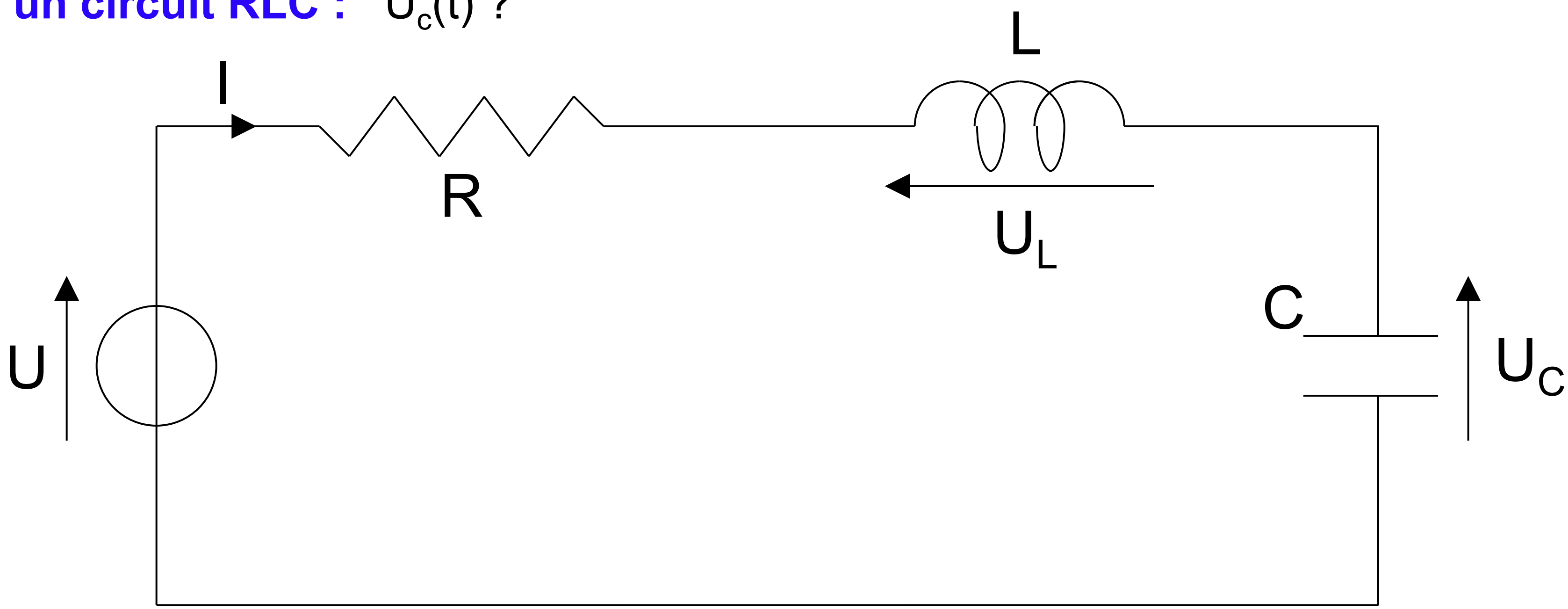
k est le gain statique (sans unité et ≥ 0)

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=ku(t)$$



La résolution de cette équation différentielle suit un cheminement légèrement plus élaboré que dans le cas du premier ordre. Une discussion sur la valeur de certaines grandeurs (en particulier z) s'impose.

Cas d'un circuit RLC : $U_c(t)$?



$$U(t) - R.I(t) - L\frac{dI(t)}{dt} - U_c(t) = 0$$

$$U(t) = RC\frac{dU_c(t)}{dt} + LC\frac{d^2U_c(t)}{dt^2} + U_c(t)$$

Équation différentielle du second ordre

On définit la pulsation propre du circuit : $$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

et le **coefficient d'amortissement** : $$2z = \frac{R}{L}$$

L'équation devient :

$$\frac{d^2U_c(t)}{dt^2} + 2z\frac{dU_c(t)}{dt} + \omega_0^2 U_c(t) = \omega_0^2 U(t)$$

Étude du régime libre

Pas d'excitation $\Rightarrow$ Résolution de l'équation sans second membre

On pose l'équation caractéristique du système

$$\frac{1}{\omega_0^2} r^2 + \frac{2Z}{\omega_0^2} r + 1 = 0$$

On calcule le discriminant réduit :

$$\Delta = \frac{2z^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}\left(z^2 - 1\right)$$

Étude du régime libre

- $\Delta > 0$, $z > 1$ ⇒ $r_{1,2} = -z\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{z^2-1}$

Il y a deux racines réelles de même signe

La solution est de la forme :

SGESSM $$U_c(t) = A.e^{r_1 t} + B.e^{r_2 t}$$

Régime libre **apériodique amorti** (amortissement fort)

- $\Delta = 0$, $z = 1$ ⇒ $r = -\omega_0$

Il y a une racine double réelle

La solution est de la forme :

SGESSM $$U_c(t) = \left(At + B\right).e^{-rt}$$

Régime libre **critique** (amortissement critique)

Étude du régime libre

- $\Delta < 0$, $0 \leq z < 1$ ⟹ $z < \omega_0$ $r_{1,2} = -z\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-z^2}$

  $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-z^2}$ pulsation des oscillations

Il y a deux racines **complexes conjuguées** r_1 et r_2

La solution est de la forme : C'est un amortissement faible

SGESSM $$U_c(t) = e^{-z\omega_0 t}\left(A\cos\left(\omega_p t\right) + B\sin\left(\omega_p t\right)\right)$$

$$U_c(t) = U_{\max} e^{-z\omega_0 t}\sin\left(\omega_p t + \varphi\right) \quad U_{\max}(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \; et \quad \tan\varphi = \frac{A}{B}$$

Étude du régime forcé

⟹ Résolution de l'équation avec second membre

⟹ La solution correspond au régime établi

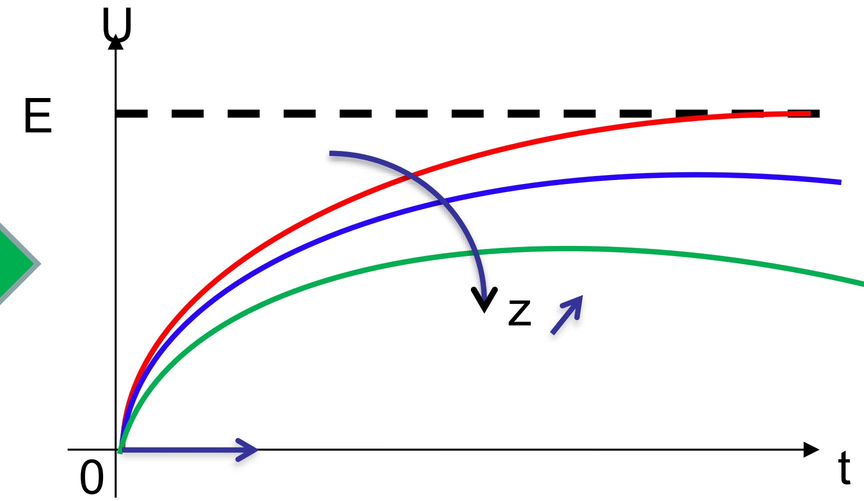
Constante ou somme de fonctions trigonométriques

Solution complète

z > 1

$$U(t) = \underbrace{A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}}_{\text{SGESSM}} + \underbrace{E}_{\text{SPEASM}}$$

En tenant compte des CI: s(0)=0, $\frac{ds(0)}{dt} = 0$



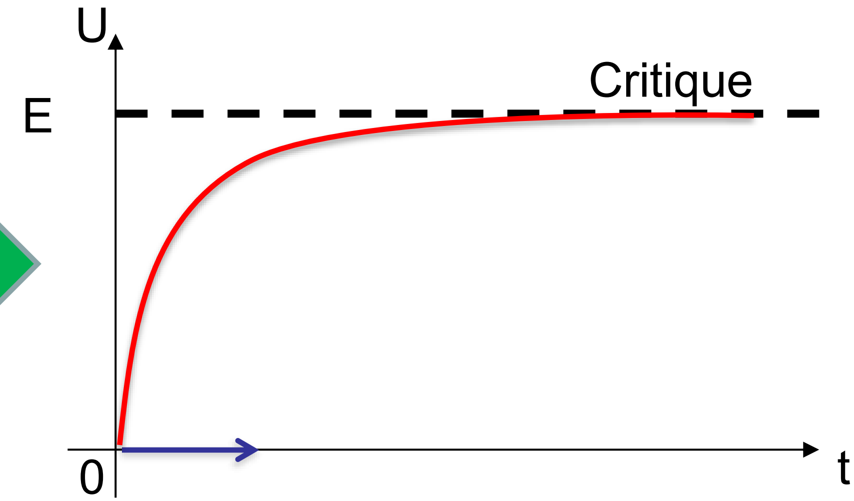
$$U(t) = E\left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\left(\tau_1 e^{\frac{-t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}}\right)\right]$$

Avec τ_1 =-1/r_1 et τ_1 =-1/r_2

Solution complète

z = 1

$$U(t) = \underbrace{e^{-\omega_0 t}\left(At+B\right)}_{\text{SGESSM}} + \underbrace{E}_{\text{SPEASM}}$$



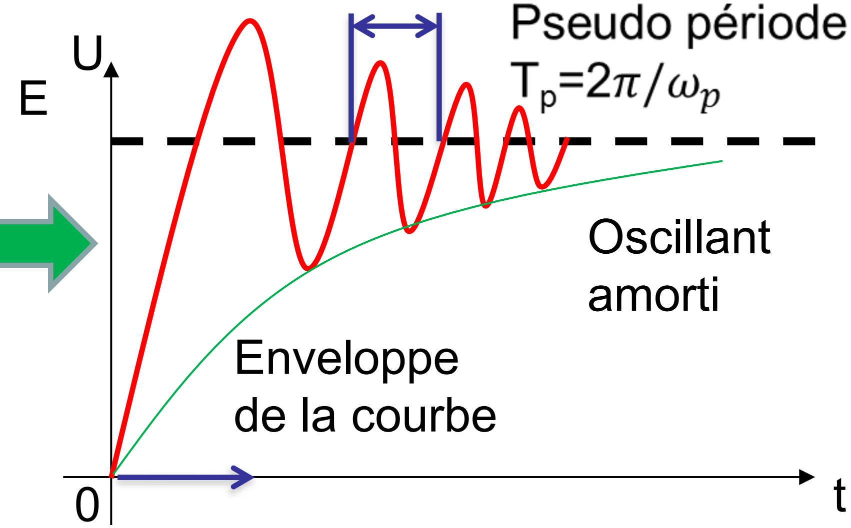
En tenant compte des CI: s(0)=0, $\frac{ds(0)}{dt} = 0$

$$U(t) = E\left[1-\left(1+\omega_0 t\right)e^{-\omega_0 t}\right]$$

Solution complète

z < 1

$$U(t) = \underbrace{U_{max}\, e^{-z\omega_0 t} \sin\left(\omega_p t + \varphi\right)}_{\text{SGESSM}} + \underbrace{E}_{\text{SPEASM}}$$



En tenant compte des CI: s(0)=0, $\frac{ds(0)}{dt} = 0$

$$U(t) = E\left[1 - \sin\left(\omega_p t + \varphi\right)\frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}}\right]$$

Avec $\cos\varphi = z$

https://univ.scholarvox.com

http://www.techniques-ingenieur.fr/

Chateigner, Guy,Boes, Michel,Bouix, Daniel, « Manuel de génie électrique : Rappels de cours, méthodes, exemples et exercices corrigés », 2006

Dixneuf Daniel Bellouvet Fabien « Principes des circuits électriques », 2007

Laurent H, « Les fondements du génie électrique »

Robert T. Paynter, B. J. Toby Boydell, « Introduction to Electricity »

Richard J, Fowler, «Electricity Principles & Applications »

Didier Celestin, Jean-Patrick Huet, Jean-Luc Valliamee, « Génie Electrique et Développement Durable