III. ANALYSE FREQUENTIELLE

1. Définitions
2. Régime sinusoïdal
3. Étude en fréquence

ANALYSE FREQUENTIELLE

A la fin de ce troisième chapitre, vous devrez être capable de:

- Identifier et décrire les signaux périodiques
- Calculer l'impédance de tout circuit basé sur des composants: R, L et C
- Décrire et analyser le fonctionnement des circuits séries et parallèles basés sur des composants: R, L et C
- Maîtriser l'analyse fréquentielle des circuits

DEFINITION

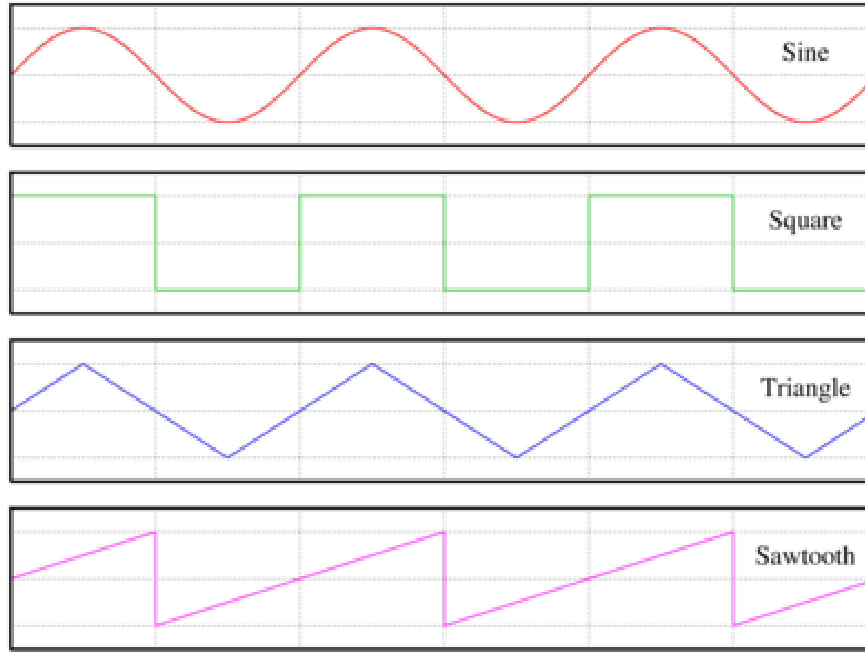
Un **signal** est dit **périodique** si les **variations** de son **amplitude** se reproduisent **régulièrement** au bout d'une **période *T*** constante.

➢La **période *T*** d'un phénomène périodique est la plus petite durée au bout de laquelle le phénomène se reproduit identique à lui-même.

➢La **fréquence *f*** d'un phénomène périodique correspond au nombre de périodes par unités de temps, c'est-à-dire le nombre de fois où le phénomène se reproduit par seconde.

Si s(t) = s(t+T)

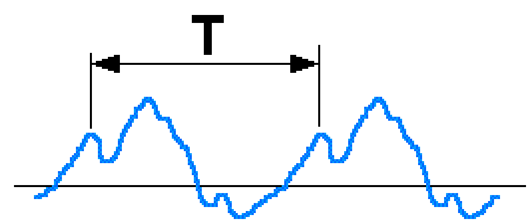
- La période
- La fréquence
- L'amplitude maximale
- La phase



s(t) est périodique de période T

La période T s'exprime en seconde (s)

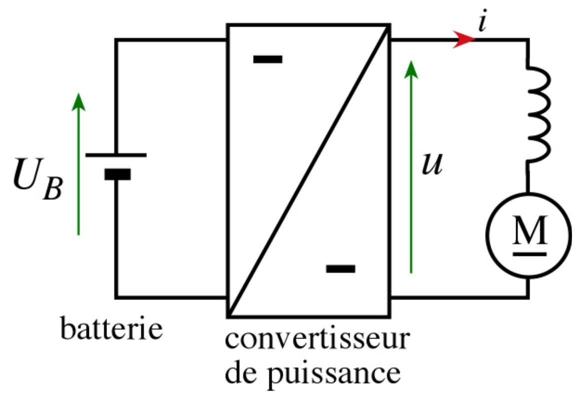
On définit la fréquence f : $f = \dfrac{1}{T}$

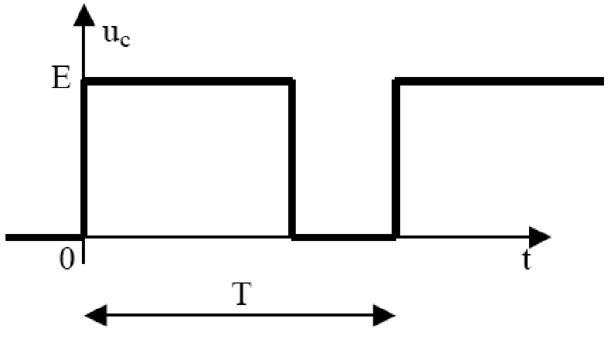


La fréquence f s'exprime en Hertz (Hz)

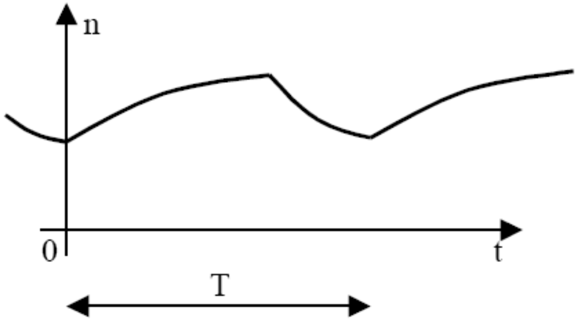
Valeur moyenne

Ex: Variation de la vitesse d'un moteur électrique alimenté par un hacheur



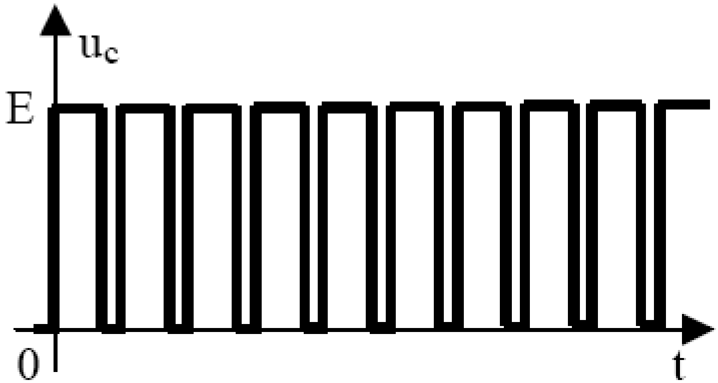


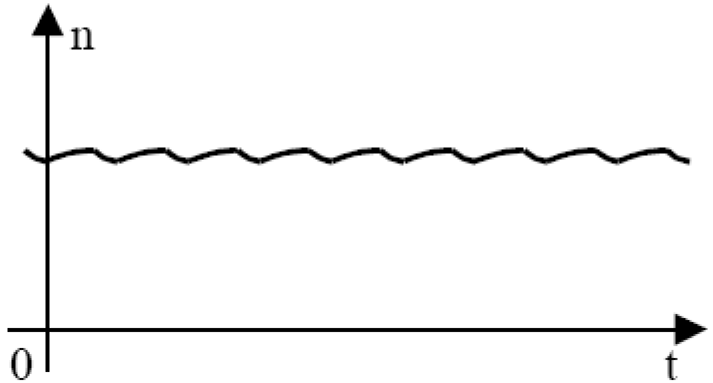
Tension *u* à la sortie du hacheur



Comportement du moteur en régime périodique

Valeur moyenne



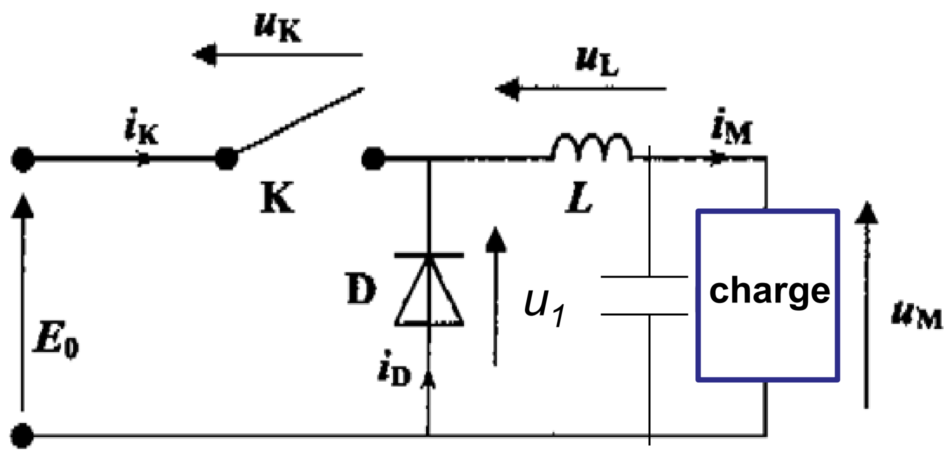


Comportement du moteur en régime périodique lorsque la fréquence est élevée

Plus la fréquence est élevée, plus la vitesse du moteur tend vers une constante déterminée par la moyenne des valeurs u_c

Valeur moyenne

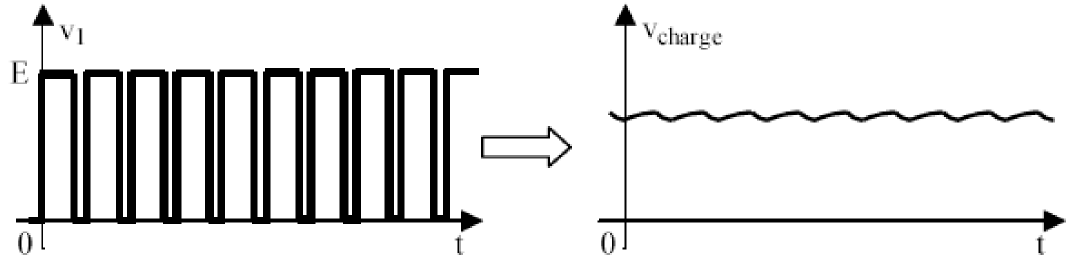
Comportement d'une alimentation à découpage



Les basculements périodiques de « k » génèrent une tension $u_1(t)$ en créneaux.

L'inductance freine les variations du courant dans le condensateur et dans la charge. Le condensateur freine les variations de tension aux bornes de la charge.

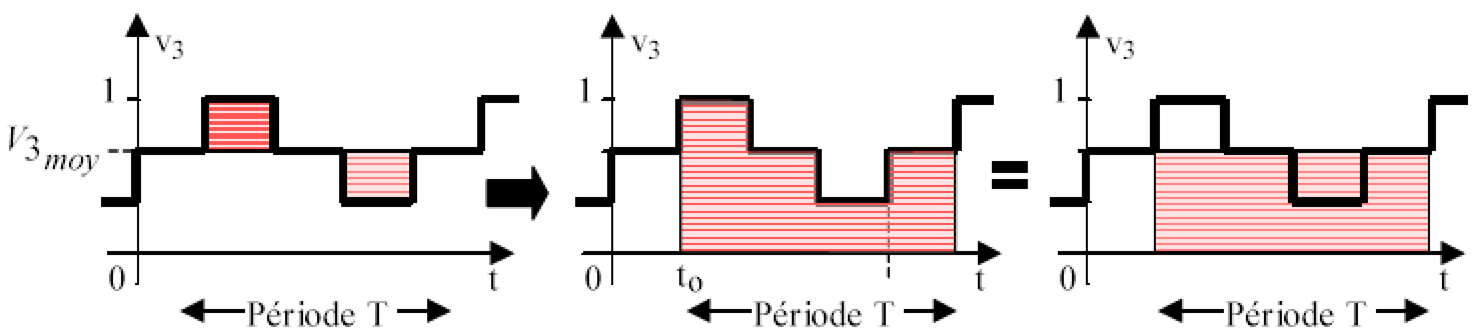
Si la fréquence est assez élevée, le condensateur n'a pas le temps de se charger et se décharger de façon sensible.



Valeur moyenne

DEFINITION

Si on associe un dispositif très rapide avec un dispositif beaucoup plus lent, le dispositif le plus lent est généralement sensible à la **moyenne** de sollicitations qu'il reçoit du dispositif rapide.



$$V_{moy} = \frac{air\ sous\ la\ courbe\ (intervale\ d'une\ periode)}{Periode}$$

Valeur moyenne

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t).dt$$

C'est une valeur algébrique qui se note aussi s_{moy} ou $\overline{s}$

Valeur efficace

$$S_{eff}^2 = \langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t).dt$$

La valeur efficace est liée à la puissance (carré)

Elle est également toujours positive

Signaux d'usage courant

- Signal alternatif ⇨ Signal périodique de valeur moyenne nulle

- Signal sinusoïdal

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t+\varphi)$$

S_0 est l'amplitude du signal

ω est la pulsation ($\omega=2\pi f$)

φ est la phase initiale (à t = 0)

Valeur efficace : $$S_{eff} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$$

1. Définitions

Tout signal périodique de période T peut se décomposer en série de Fourier

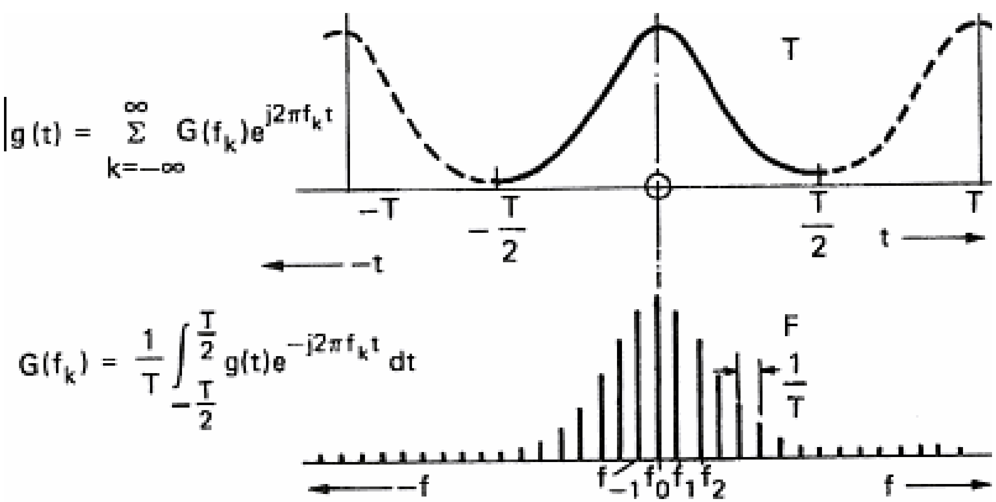
Joseph Fourier
mathématicien et physicien
1768- 1830

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n . \cos\left(n\omega t + \varphi_n\right)$$

Où S_0 est la valeur moyenne du signal

S_n sont les coefficients de Fourier

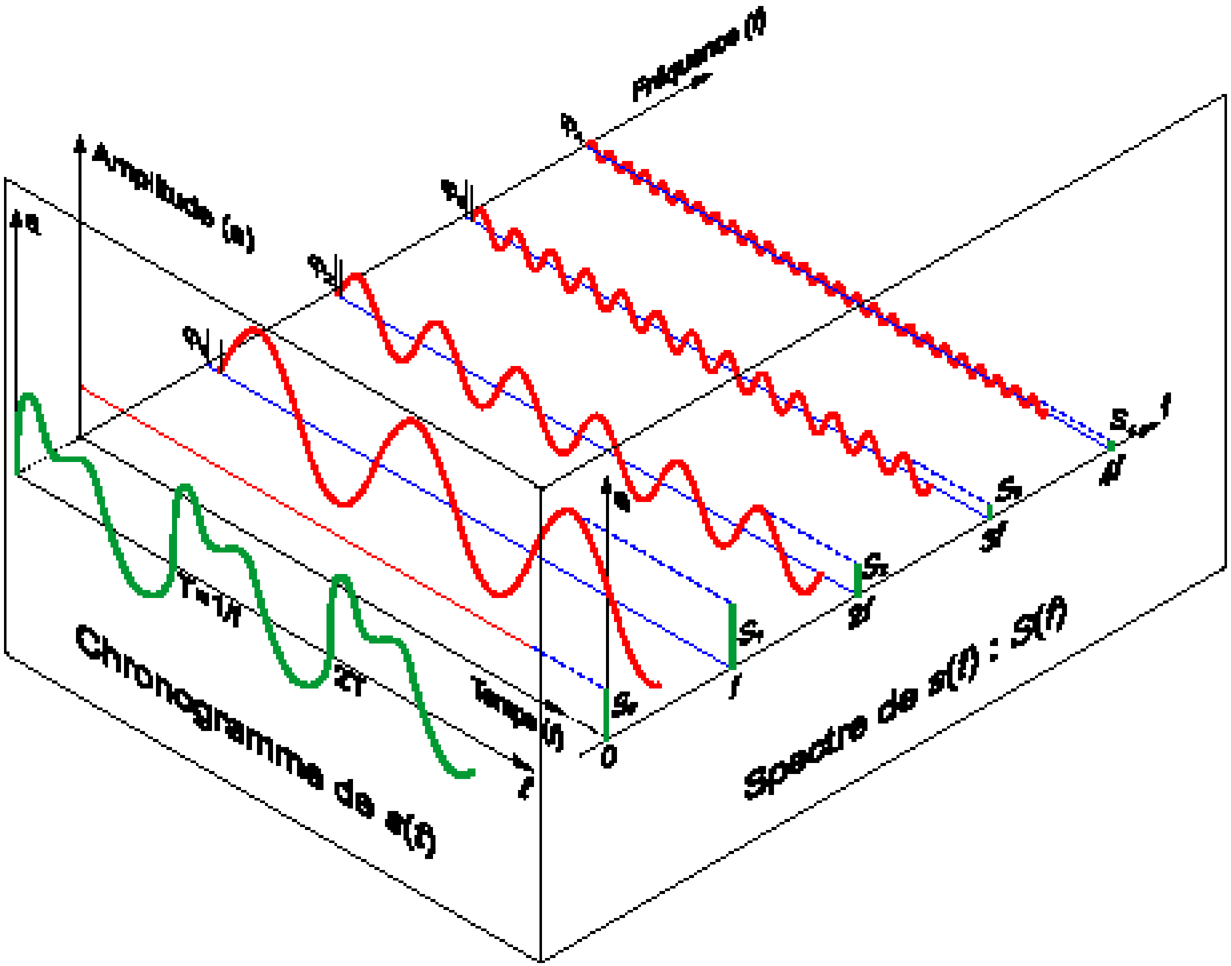
φ_n sont les phases



graphe d'une fonction périodique

valeurs des modules des coefficients de Fourier correspondant aux différentes fréquences

1. Définitions



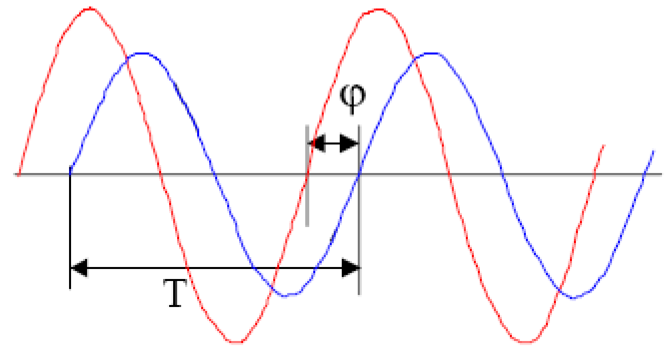
2. Le régime sinusoïdal

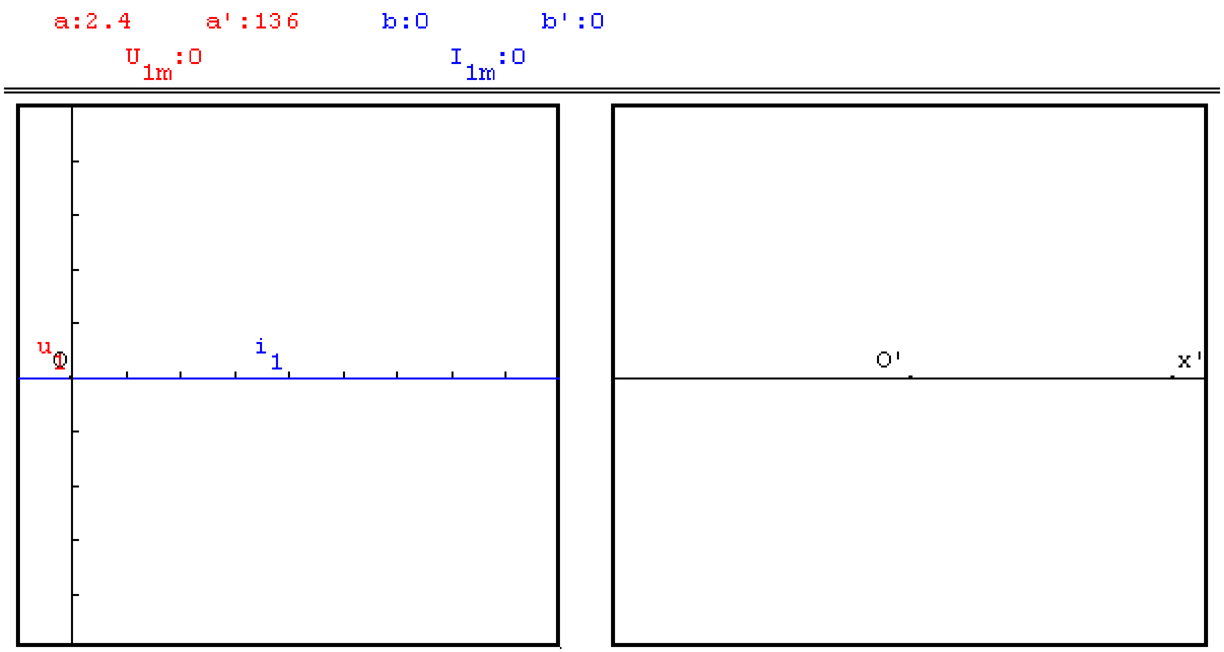
- Une grande partie de l'énergie électrique est fournie sous forme de grandeurs alternatives sinusoïdales

- Manipulations mathématique et électrique simples pour les signaux sinusoïdaux

- Toute fonction périodique quelconque peut s'écrire sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux

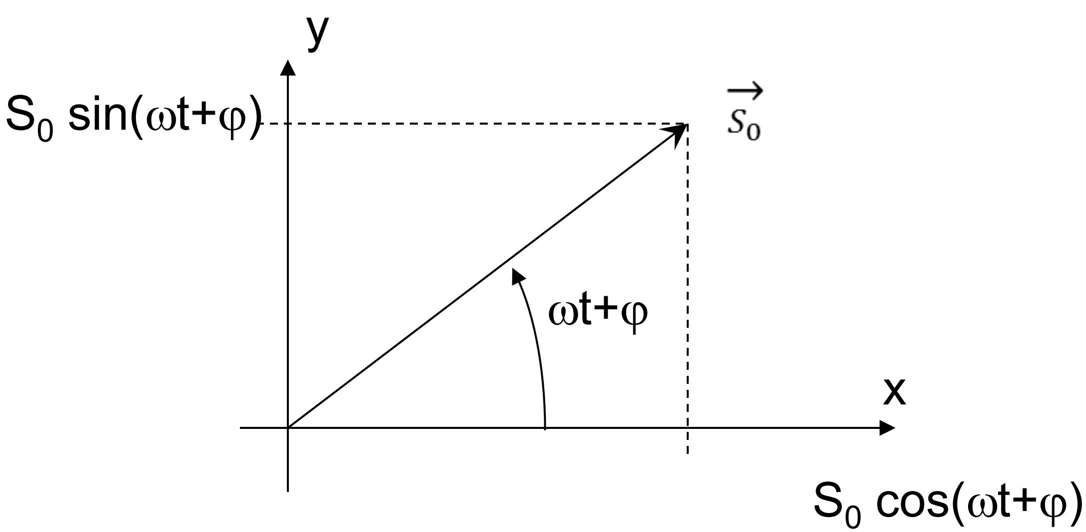
$$s(t) = S_{eff}\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi)$$





On peut représenter le signal par un vecteur

$\bar{S} = \boldsymbol{Re}\bar{S} + j\boldsymbol{Im}\bar{S} = S_0\,[\cos(\omega t+\varphi) + j\,\sin(\omega t+\varphi)]$



$$S_0 = S_{eff}\sqrt{2}$$

Pour faciliter les calculs, on utilise une représentation complexe

$$s(t) = S_{eff}\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{s} = S_{eff}\sqrt{2}.e^{j(\omega t + \varphi)}$$

s(t) représente la partie réelle de $\underline{s}$

Le module de $\underline{s}$ est l'amplitude de s(t)

Sa phase est $\omega t+\varphi$

j représente le nombre imaginaire complexe ($j^2 = -1$)

2. Le régime sinusoïdal

- $s(t) = S_0 \cos(\omega t+\varphi)$ $\longrightarrow$ $\underline{s} = \underline{S_0}.e^{j\omega t}$

  où $\underline{S_0} = S_0 e^{j\varphi}$

- $\dfrac{ds(t)}{dt}$ $\longrightarrow$ $j\omega.\underline{S_0}.e^{j\omega t}$

- $\int s(t)dt$ $\longrightarrow$ $\dfrac{1}{j\omega}.\underline{S_0}.e^{j\omega t}$

On définit l'impédance complexe $\underline{Z}$ telle que

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

L'impédance réelle Z est la partie réelle de $\underline{Z}$

- Résistance ⇨ $\underline{Z} = R$
- Bobine ⇨ $\underline{Z} = jL\omega$
- Condensateur ⇨ $\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$

L'impédance électrique mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un **courant alternatif sinusoïdal**.

La définition d'impédance est une généralisation de la loi d'Ohm dans l'étude des circuits en courant alternatif.

Pour résoudre les circuits, on utilise, à la place des différents composants passifs, l'impédance Z.

Loi d'Ohm généralisée

$$U(t)=Z.I(t)$$

Pour des grandeurs sinusoïdales, Z est complexe. Sa partie réelle représente l'effet résistif alors que sa partie imaginaire peut être capacitive ou inductive

On définit l'admittance

$$Y=\frac{1}{Z}$$

$$Z = R + jX$$

R est la partie **résistive** et ***X*** es la partie **réactive** ou **réactance**.

L'admittance est l'inverse de l'impédance : $Y = \frac{1}{Z}$

Composants parfaits :

- **Résistance** : l'impédance d'une résistance R est égale à R :

  Z_R= R, .

  C'est le seul composant à avoir une impédance réelle.

- **Bobine** : L'impédance d'une bobine d'inductance L est :

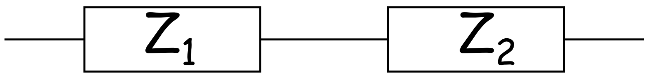
  $Z_L = j\omega L$,.

  Ici $\omega = 2\pi f$ est la pulsation, f la fréquence et $j^2 = -1$.

- **Condensateur** : L'impédance d'un condensateur de capacité C est :

  $Z_C = 1/ j\omega C$

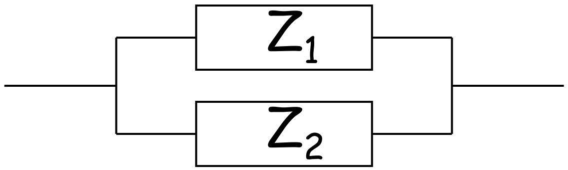
En série



$$Z_{série} = Z_1 + Z_2$$

$$\boxed{Z_{série} = \sum_n Z_i}$$

En parallèle



$$\frac{1}{Z_{//}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

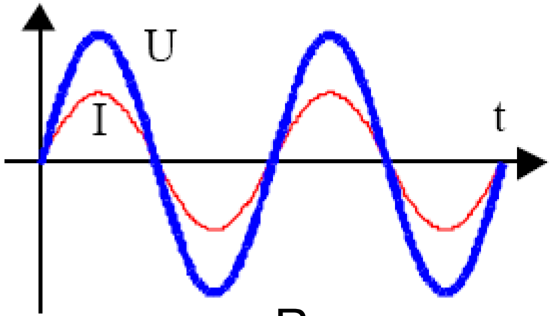
$$Y_{//} = Y_1 + Y_2$$

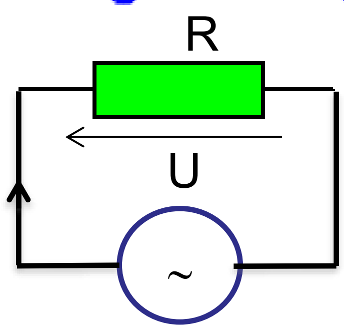
$$\boxed{\frac{1}{Z_{//}} = \sum_n \frac{1}{Z_i}}$$

2. Le régime sinusoïdal

Impédance complexe

Résistances

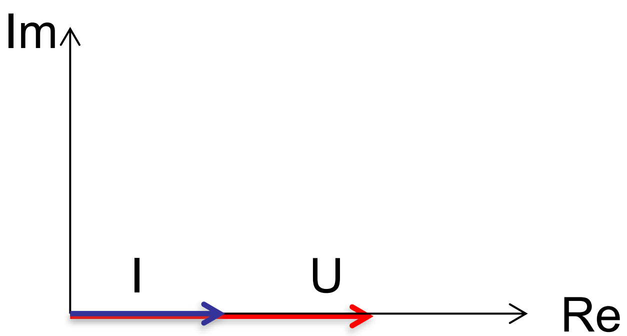




U(t)=R*i(t) $\underline{U}=\underline{Z}*\underline{I}$ $\underline{Z} = R$

L'impédance d'une résistance pure et égale à sa résistance.

Le courant est en phase avec la tension



Une résistance réelle peut présenter une composante inductive en série (cas des résistance bobinées) et une petite composante capacitive en parallèle. Les effets de cette dernière seront sensibles uniquement aux hautes fréquences.

Condensateurs

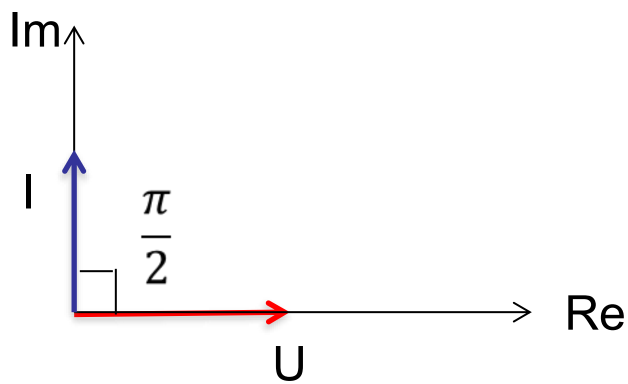
$$\text{i}(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

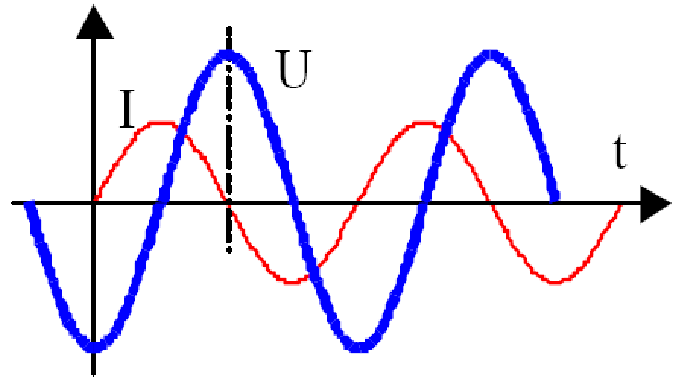
$$\underline{u} = Ue^{j\omega t}$$

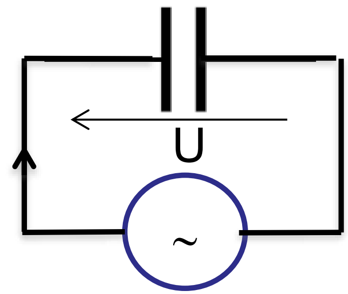
$$\frac{du}{dt} = j\omega Ue^{j\omega t}$$

$$\underline{i} = jC\omega\underline{u}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$



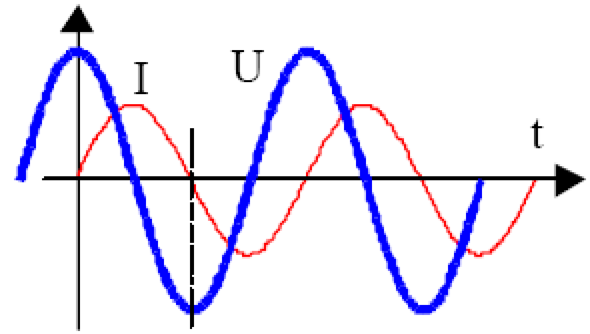




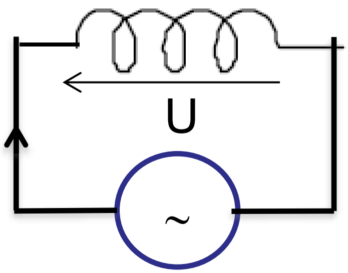
Dans un condensateur idéal, le courant est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension

2. Le régime sinusoïdal

Inductances



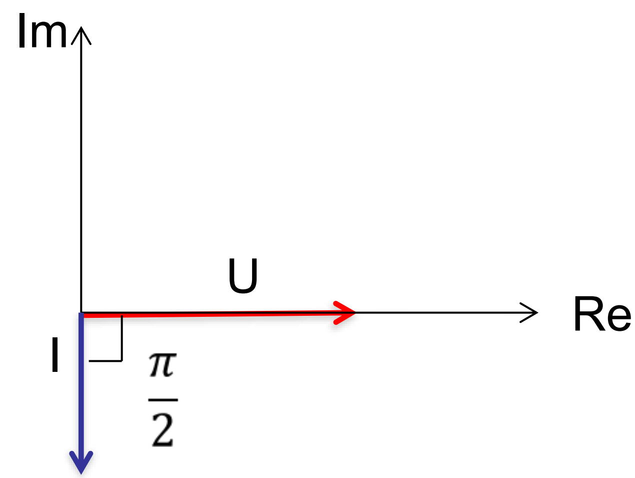
$$u(t) = L\frac{di}{dt}$$



En complexe:

$$\underline{u} = L\frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\underline{i}$$

$$\underline{Z} = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$



Lois et théorèmes

Les lois et théorèmes de l'électrocinétique s'appliquent en régime sinusoïdal.

- Lois de Kirchhoff (lois des mailles et des nœuds)
- Théorèmes de superposition, Thévenin, Norton, Millman

⇨ On utilise alors les notations complexes dans les équations

Puissance instantanée

Si $$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_u)$$
$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$p(t) = u(t).i(t)$$
$$= UI\cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

Puissance moyenne

Le terme UI est appelé puissance apparente

Le terme cos(φ) est appelé facteur de puissance

Puissance complexe

A partir de la valeur moyenne de la puissance instantanée, on définit la puissance complexe S

$$\underline{S} = UIe^{j\varphi} = P + jQ$$

P = UIcosφ est la puissance active en Watts

Q = UIsinφ est la puissance réactive en VAR (Volt Ampères Réactifs)

S = UI est la puissance apparente en VA

Théorème de Boucherot

DEFINITION

La puissance complexe consommée dans un circuit est la somme des puissances complexes consommées dans chaque élément du circuit: $\underline{S} = \sum_n \underline{S}_i$

Par conséquent, $P = \sum_n P_i$ et $Q = \sum_n Q_i$

Mais attention, ce n'est pas le cas en module :

$$S^2 = \left[\sum_n P_i\right]^2 + \left[\sum_n Q_i\right]^2 \neq \sum_n P_i^2 + Q_i^2$$

2. Le régime sinusoïdal

En résumé

	$\underline{Z}$	φ	P	Q
Résistance	R	0	RI^2	0
$\underline{U} = R\underline{I}$	Si $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ $u(t) = RI\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$			
Bobine	$jL\omega$	$+\pi/2$	0	$L\omega I^2$
$\underline{U} = jL\omega\underline{I}$	Si $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ $u(t) = L\omega I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$			
Condensateur	$1/jC\omega$	$-\pi/2$	0	$-I^2/C\omega$
$\underline{U} = \dfrac{\underline{I}}{jC\omega}$	Si $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ $i(t) = C\omega U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$			

3. Etude en fréquence

Un circuit linéaire transforme une entrée sinusoïdale de pulsation ω en une sortie de même pulsation.

La sortie du système est liée à l'entrée par une équation différentielle linéaire de la forme :

$$b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t)$$

Dans un circuit linéaire, en régime sinusoïdal :

$$e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_e) \qquad \underline{E} = E\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi_e)}$$

$$s(t) = S\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_s) \qquad \underline{S} = S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi_s)}$$

Les amplitudes efficaces E et S dépendent de la pulsation et pourraient être notées E(ω) et S(ω)

On définit ainsi la fonction de transfert H(j ω) du circuit (également appelée transmittance)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S}{E} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = H(\omega) e^{j\varphi}$$

On appelle :

- Gain du circuit : le module de la transmittance

$$H(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{S(\omega)}{E(\omega)}$$

- Phase du circuit : l'argument de la transmittance

$$\varphi = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \varphi_s - \varphi_e$$

<u>Rappels :</u>

$$\underline{Z} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

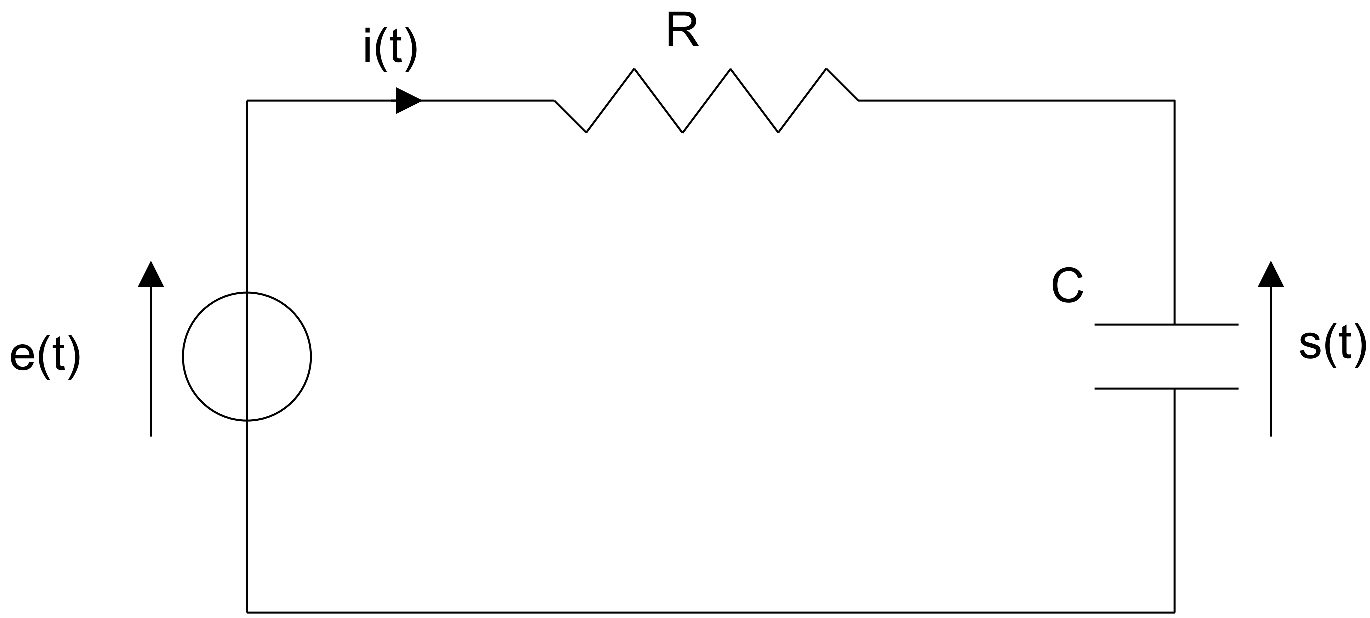
Module de Z :

$$\left\|\underline{Z}\right\| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Argument de Z :

$$Arg(\underline{Z}) = \arctan\frac{b}{a} - \arctan\frac{d}{c}$$

1) Si on connaît le circuit



$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

2) Si on connaît l'équation différentielle du circuit

$$b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t)$$

En utilisant les grandeurs complexes, on trouve :

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \underline{H}(j\omega) = \frac{a_0}{b_0} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0} j\omega + \frac{b_2}{b_0} (j\omega)^2}$$

Diagrammes de Bode

Ils permettent de représenter le gain et la phase d'une fonction de transfert connue

- Pour le gain

$$G_{dB} = 20\log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\log\left(H(\omega)\right)$$

Il s'exprime en décibels (dB)

- Pour la phase

$$\varphi = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$$

3. Etude en fréquence

Nécessité d'utiliser une progression logarithmique :

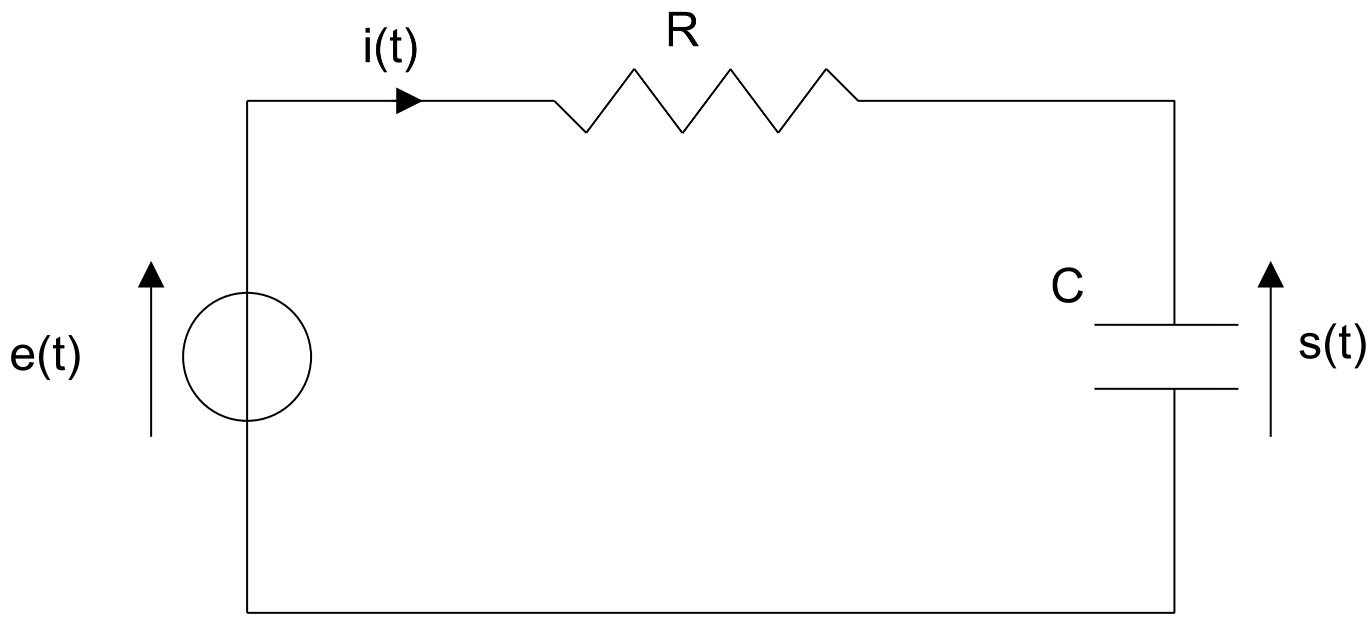
L'étude de l'évolution de l'amplitude des signaux est souvent nécessaire sur plusieurs décades

- Les courbes asymptotiques

  Elles permettent une représentation simplifiée en étudiant le comportement aux bornes du domaine de définition (ω->0 et ω ->∞) et sur les pulsations remarquables (ω -> ω_0)

- Les courbes réelles

  C'est la représentation de G_{dB} et φ



$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

avec ω_0 = 1/RC

système du premier ordre

- Pour le gain

$$G_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

- Pour la phase

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- Aux basses fréquences : ω ->0

$$1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow 1^+$$

- G_{dB}->0^- :

  La droite G_{dB}=0 est asymptote à la courbe de gain et se trouve au dessus de cette courbe

- φ->0^- :

  La droite φ=0 est asymptote à la courbe de phase et se trouve au dessus de cette courbe

- Aux fréquences élevées : $\omega \to \infty$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \to \frac{\omega}{\omega_0}^{+}$$

- $$G_{dB} \to 20\log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = 20\log(\omega_0) - 20\log(\omega)$$

  $G_{dB}=20\log(\omega_0)-20\log(\omega)$ est asymptote à la courbe de gain et se trouve au dessus de cette courbe

  Elle présente une décroissance de -20dB/décade

- $\varphi \to (-\frac{\pi}{2})^{+}$

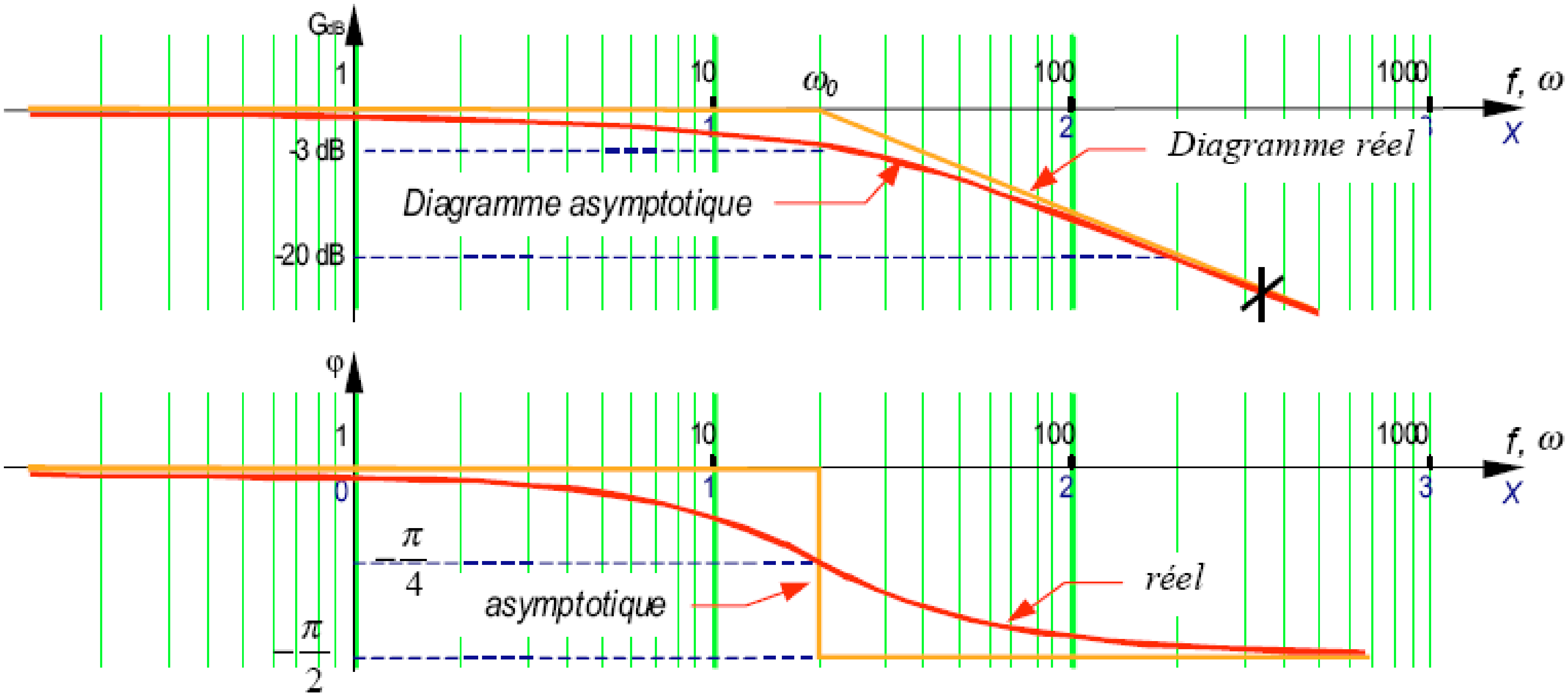
  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe de phase et se trouve au dessous de cette courbe

- Point particulier : la fréquence de coupure $\omega \rightarrow \omega_c$

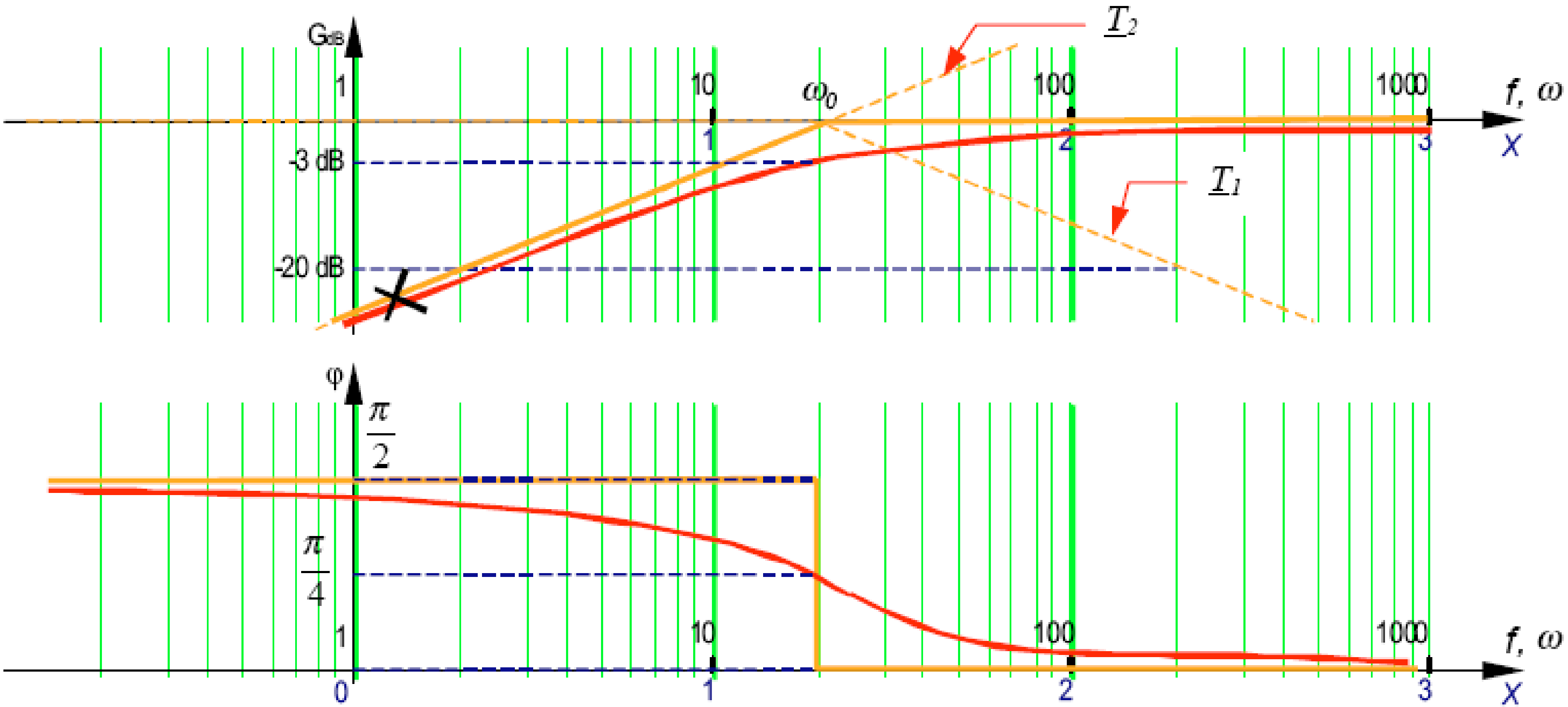
Les deux asymptotes pour le gain ou la phase se coupent à $\omega = \omega_c$ appelée pulsation de coupure

$$G_{dB} = -10\log(2) \approx -3dB$$

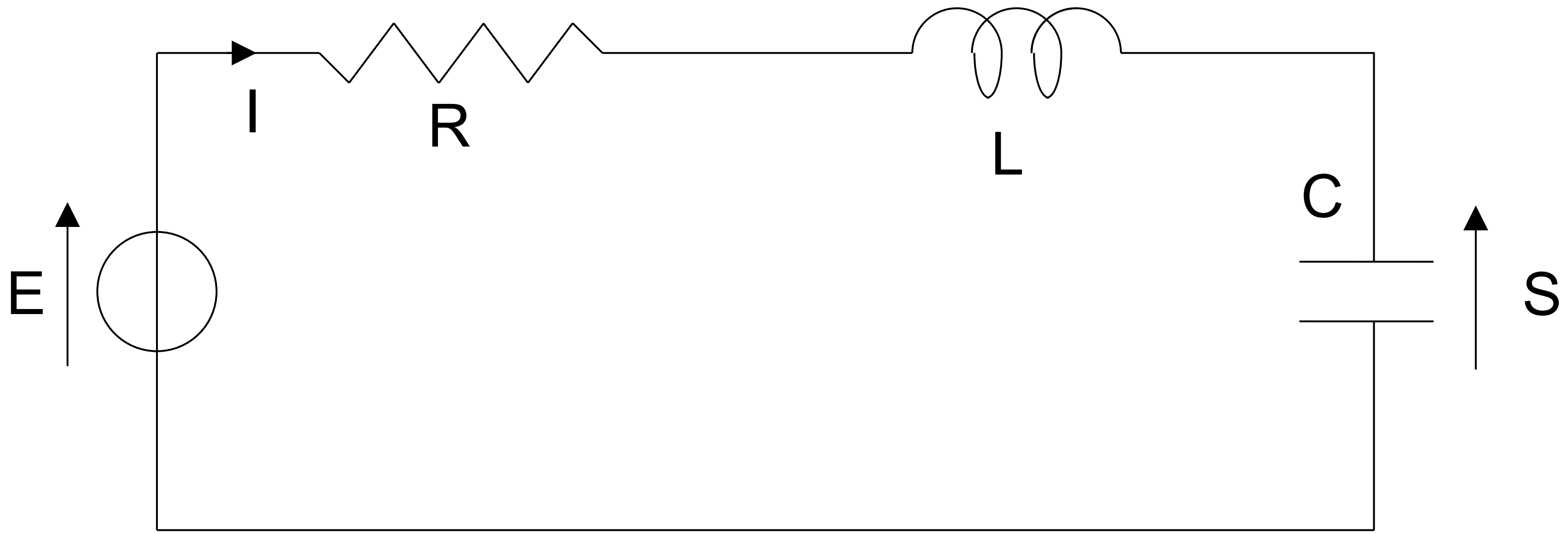
$$\varphi = -\frac{\pi}{4}$$



C'est un système du premier ordre appelé filtre passe-bas



Exemple du filtre passe-haut



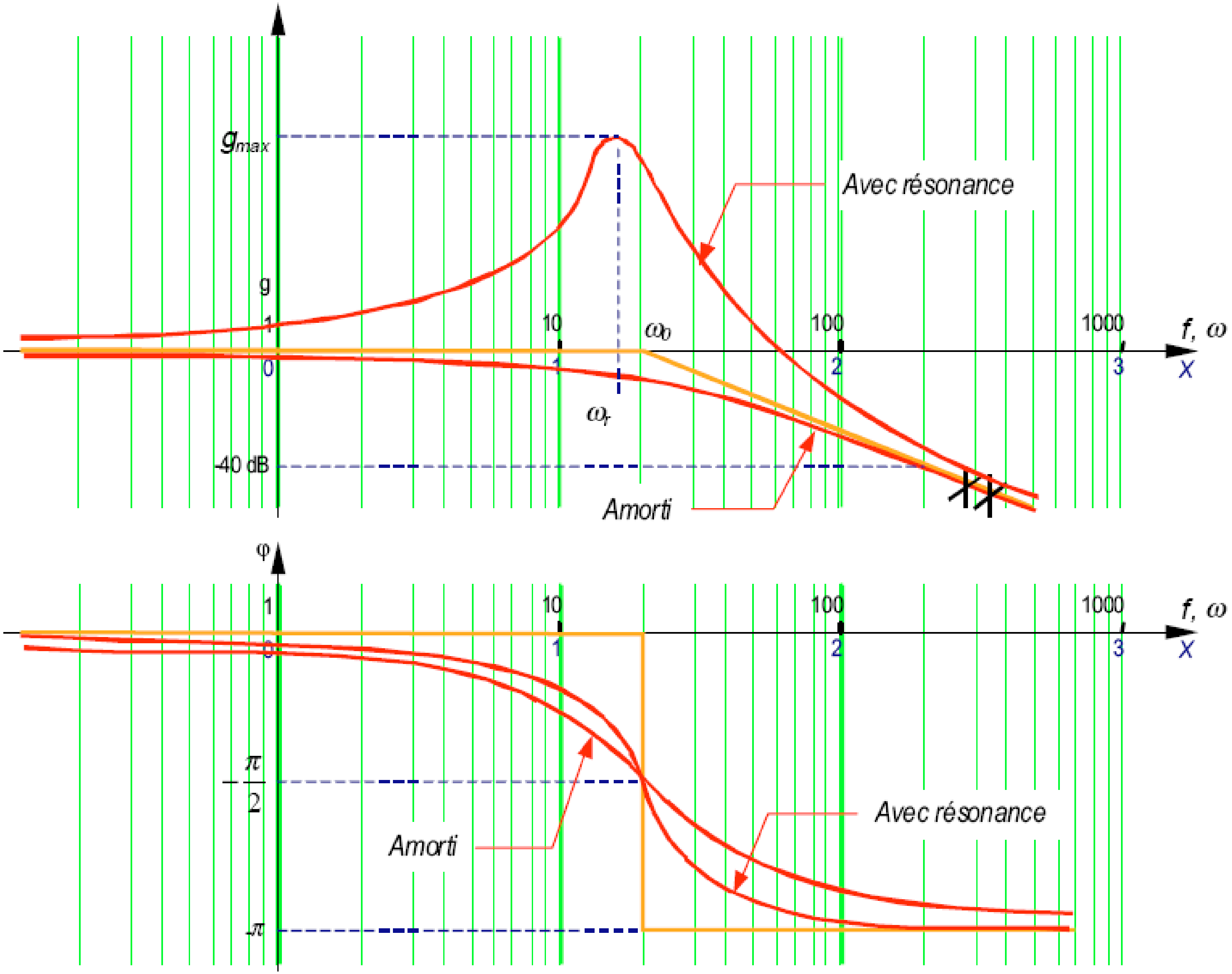
$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2} = \frac{1}{1 + 2jz\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec

$$z = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

système du second ordre



C'est un système passe-bas d'ordre 2

https://univ.scholarvox.com

http://www.techniques-ingenieur.fr/

Chateigner, Guy,Boes, Michel,Bouix, Daniel, « Manuel de génie électrique : Rappels de cours, méthodes, exemples et exercices corrigés », 2006

Dixneuf Daniel Bellouvet Fabien « Principes des circuits électriques », 2007

Laurent H, « Les fondements du génie électrique »

Robert T. Paynter, B. J. Toby Boydell, « Introduction to Electricity »

Richard J, Fowler, «Electricity Principles & Applications »

Didier Celestin, Jean-Patrick Huet, Jean-Luc Valliamee, « Génie Electrique et Développement Durable