# CI-SST81E6 – Mathématiques générales [1]

# Td 1

Mots clefs : CI, SST, SST81E6, mathématiques, arithmétique, polynômes

## Exercice 1

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide étendu, montrez que 169 et 45 sont premiers entre eux et trouvez deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $169u + 45v = 1$.
2. Retrouvez le fait que 169 et 45 sont premiers entre eux en utilisant les décompositions en produit de facteurs premiers de 169 et 45.
3. Déterminez l'ensemble des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs vérifiant les deux conditions suivantes

$$\begin{cases} 169x + 45y = 1 \\ 100 \leq x \leq 200 \end{cases}$$

4. Calculez l'inverse de $\overline{34} = \overline{169}$ dans $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$ et l'inverse de $\overline{45}$ dans $\mathbb{Z}/169\mathbb{Z}$.
5. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes à coefficients dans $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$. On pose $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \overline{9} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{4} \end{pmatrix}$. Montrez que U est inversible dans $\mathscr{A}$ et calculez son inverse.
6. Résolvez dans $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} \overline{9}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ x + \overline{4}y = \overline{2} \end{cases}$$

## Exercice 2

Trouvez l'ensemble des entiers $x$ tels que $0 \leq x \leq 100$ qui sont solutions du système

$$\begin{cases} x \equiv 1\,[3] \\ x \equiv 2\,[5] \\ x \equiv -1\,[7] \end{cases}$$

## Exercice 3

1. Donnez les tables d'addition de de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
2. Résolvez l'équation $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
3. Déterminez l'ensemble E des entiers $n \in [\![2\,;20]\!]$ tels que l'équation $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$ ait des solutions dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

## Exercice 4

Soit $n$ un nombre premier. On pose $\mathrm{K}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et on rappelle que $\mathrm{K}_n$ est un corps. Soit un polynôme $p \in \mathrm{K}_n[x]$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et une famille $\left(a_0,\ \ldots,\ a_n\right)$ d'éléments de $\mathrm{K}_n$ telle que $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$. De plus $p$ est unitaire $a_m = 1$.

1. Soit $p \in \mathrm{K}_2[x]$ tel que $p(x) = x^2 + x + \overline{1}$. Montrez que $p$ n'admet aucune racine sur $\mathrm{K}_2$. Déduisez-en que $p$ est un polynôme irréductible de $\mathrm{K}_2[x]$ et vérifiez que c'est le seul polynôme unitaire irréductible de $\mathrm{K}_2[x]$ de degré 2.
2. Donnez la liste des polynômes unitaires de degré 2 de $\mathrm{K}_3[x]$. Parmi ces polynômes déterminez les polynômes irréductibles et factorisez les polynômes non irréductibles en produit de polynômes de degré 1.

## Exercice 5

Déterminez les polynômes $q$ solutions du système

$$\begin{cases} q \equiv -1\left[x^2 + 1\right] \\ q \equiv -x\,[x - 1] \\ q \equiv 1\left[x^2 - x + 1\right] \end{cases}$$

1. Responsable : Nicolas Bur (n.bur@estia.fr)
Intervenants : Adama Arama , Cyrille André , Michel Bakni et Nicolas Bur

✎ **Exercice 6**

Donnez la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$R(x) = \frac{7x^2 - 42x - 26}{7x^3 + 7x^2}$$