

# CI-SST81E6 – Mathématiques générales<sup>1</sup>

## Td 2

Mots clefs : CI, SST, SST81E6, mathématiques, projecteur spectral, matrice, puissance de matrice, exponentielle de matrice

### Exercice 1

On pose  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifiez que le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est défini par  $\chi_A(x) = x^2(x + 1)$ .
2. Calculez  $A(A + \text{Id}_3)$ . La matrice est-elle diagonalisable ?
3. Donnez les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres de  $A$ .
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculez  $A^n$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , calculez  $e^{tA}$ .

### Exercice 2

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres réels. On pose  $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ .

1. Pour quelles valeurs du triplet  $(a; b; c)$  la matrice  $B$  est-elle diagonalisable ?
2. Quand  $B$  est diagonalisable, donnez les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres de  $B$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculez  $B^n$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , calculez  $e^{tB}$ .

### Exercice 3

Soit la matrice  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifiez que le polynôme caractéristique  $\chi_C$  est défini par  $\chi_C(x) = (x - 2)^2(x - 4)^2$ .
2. Calculez  $(C - 2\text{Id}_4)(C - 4\text{Id}_4)$ . La matrice  $C$  est-elle diagonalisable ?
3. Donnez les projecteurs spectraux  $P_0$  et  $P_1$  associés aux valeurs propres 2 et 4 de  $C$ .
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculez  $C^n$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , calculez  $e^{tC}$ .
5. En utilisant le fait que le sous-espace propre  $E_2$  est engendré par les colonnes de  $P_0$  et que le sous-espace  $E_4$  est engendré par les colonnes de  $P_1$ , trouvez une base de  $\mathbb{R}^4$  formée de vecteurs propres de  $C$ .

1. Responsable : Nicolas BUR ([n.bur@estia.fr](mailto:n.bur@estia.fr))

Intervenants : Adama ARAMA, Cyrille ANDRÉ, Michel BAKNI et Nicolas BUR