# CI-SST81E6 – Mathématiques générales [1]

# Td 3

Mots clefs : CI, SST, SST81E6, mathématiques, matrice, décomposition, Jordan-Chevalley, puissance de matrice, exponentielle de matrice

## Exercice 1

Calculez la racine cubique de 2 à $1 \times 10^{-8}$ près par défaut en utilisant l'algorithme de Newton, avec la condition initiale $x_0 = 3/2$ (vous arrêterez la boucle de calcul quand les 8 premières décimales de $x_n$ et $x_{n+1}$ coïncident).

## Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrez le polynôme caractéristique $\chi_A$ de A est égal à $x^2(x-1)$ et déduisez du théorème de Cayley-Hamilton que $A^3 = A^2$.
2. Calculez la matrice $A(A - \mathrm{Id}_3)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Quelle est la dimension de chacun des sous-espaces propres de A ?
4. Soit $A = D + N$, la décomposition de Jordan-Chevalley de A, avec D diagonalisable, N nilpotente, $ND = DN$. Calculez la partie diagonalisable D en utilisant
   a) le théorème chinois,
   b) l'algorithme de Newton.

   Déduisez-en la partie nilpotente N.
5. Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $D^n = D$ et calculez $A^n$.
6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculez $e^{tD}$ et $e^{tA}$.

## Exercice 3

On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $A = D + N$, la décomposition de Jordan-Chevalley de A, avec D diagonalisable, N nilpotente, $ND = DN$. Calculez la partie diagonalisable D en utilisant
   a) le théorème chinois,
   b) l'algorithme de Newton.

   Déduisez-en la partie nilpotente N.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculez $B^n$.
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculez $e^{tB}$.

1. Responsable : Nicolas Bur (n.bur@estia.fr)
Intervenants : Adama Arama , Cyrille André , Michel Bakni et Nicolas Bur