⚙️ GUIDE GÉNÉRAL — MODÉLISATION DES MÉCANISMES

(Cinématique → Statique → Cinétique → Dynamique → Équilibre Dynamique)

I. CINÉMATIQUE

Repères et variables

Deux repères :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ fixe et galiléen
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au solide

Angle θ en radians. Vitesse angulaire $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ en rad s^{-1}. Accélération angulaire $\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ en rad s^{-2}.

Changement de base dans le plan x_0y_0

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos(\theta)\,\vec{x}_0 + \sin(\theta)\,\vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 = -\sin(\theta)\,\vec{x}_0 + \cos(\theta)\,\vec{y}_0 \end{cases}$$

Dérivation dans une base mobile (formule de Poisson)

Vecteur rotation

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\,\vec{z}$$

Formule

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{u}$$

Applications aux axes

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_0 = \dot{\theta}\,\vec{y}_1 \\ \left.\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_0 = -\dot{\theta}\,\vec{x}_1 \end{cases}$$

Vitesse d’un point

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

Accélération d’un point

$$\vec{\Gamma}_B = \vec{\Gamma}_A + \vec{AB} \wedge \dot{\vec{\Omega}}_{1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \left(\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{AB}\right)$$

Cas rotation autour d'un axe à distance R

$$\vec{\Gamma}_B = R\left(\ddot{\theta}\,\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\,\vec{x}_1\right)$$

II. STATIQUE

Torseur d'action mécanique au point A

$$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$$

Changement de point

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

Torseurs usuels

Poids appliqué en G

$$\mathcal{T}_P = \begin{Bmatrix} -mg\,\vec{y}_0 \\ \vec{0}_G \end{Bmatrix}$$

Liaison pivot au point O

$$\mathcal{T}_{\text{pivot}} = \begin{Bmatrix} F_x\,\vec{x}_1 + F_y\,\vec{y}_1 \\ \vec{0}_O \end{Bmatrix}$$

Somme des actions extérieures au point O

$$\sum \mathcal{T}_{\text{ext}} = \begin{Bmatrix} \sum \vec{F}_i \\ \sum \vec{M}_{O,i} \end{Bmatrix}_O$$

III. CINÉTIQUE

Masse et volume

$$m = \rho V$$

Moment d'inertie

Définition

$$I = \int r^2 \, dm$$

Usuels

$$I_{\text{disque}} = \tfrac{1}{2} m R^2$$

$$I_{\text{barre, axe extrémité}} = \tfrac{1}{3} m L^2$$

Moment cinétique

$$\vec{H}_G = I \, \vec{\Omega}_{1/0} = I \, \dot{\theta} \, \vec{z}$$

Torseur cinétique

Au point G

$$\mathcal{T}_{ci(1/0)} = \begin{Bmatrix} m \, \vec{V}_G \\ \vec{H}_G \end{Bmatrix}_G$$

Transport au point O

$$\vec{H}_O = \vec{H}_G + \vec{OG} \wedge \left(m \, \vec{V}_G \right)$$

IV. DYNAMIQUE

Principe fondamental de la dynamique

Forme torseur

$$\sum \mathcal{T}_{\text{ext}} = \mathcal{T}_{dy(1/0)}$$

Torseur dynamique au point G

$$\mathcal{T}_{dy(1/0)} = \begin{Bmatrix} m \, \vec{\Gamma}_G \\ I \, \ddot{\theta} \, \vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

V. ÉQUILIBRE DYNAMIQUE

Mise en équations par projections

Point de départ

$$\sum \mathcal{T}_{\text{ext}} = \mathcal{T}_{dy}$$

Projections typiques pour une rotation de rayon R

$$\begin{cases} \sum F_{x_1} = -mR\,\dot{\theta}^2 \\ \sum F_{y_1} = mR\,\ddot{\theta} \\ \sum M_z = I\,\ddot{\theta} \end{cases}$$

Petits mouvements

Approximations pour petits angles

$$\sin(\theta) \approx \theta \cos(\theta) \approx 1$$

Équation linéarisée

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$$

Pulsation propre selon le système

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}} \quad \text{ou} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

VI. RÉCAP DES SYMBOLES

θ angle en rad
$\dot{\theta}$ vitesse angulaire en rad s^{-1}
$\ddot{\theta}$ accélération angulaire en rad s^{-2}
$\vec{\Omega}_{1/0}$ vecteur rotation en rad s^{-1}
$\vec{V}$ vitesse en m s^{-1}
$\vec{\Gamma}$ accélération en m s^{-2}
m masse en kg
I moment d'inertie en kg m^2
$\vec{F}$ force en N
$\vec{M}$ moment en N m
$\wedge$ produit vectoriel