

Modélisation des mécanismes

Table des matières

I. Cinématique	9
1. Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point d'un solide	11
1.1. Étude du mouvement	11
1.2. Vecteur position d'un point du solide	11
1.3. Vecteur vitesse d'un point du solide	12
1.4. Vecteur accélération d'un point du solide	13
2. Champ des vecteurs vitesse et accélération des points d'un solide	15
2.1. Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide	15
2.2. Torseur cinématique	16
2.3. Propriétés du torseur cinématique	16
2.3.1. Axe central du torseur cinématique	16
2.3.2. Axoïdes	17
2.4. Equiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide	17
2.5. Champ des vecteurs accélération des points d'un solide	18
3. Composition des mouvements	19
3.1. Composition des vecteurs vitesses	19
3.2. Composition des vecteurs rotation	19
3.3. Composition des torseurs cinématiques	20
3.4. Composition des vecteurs accélération	20
4. Mouvements fondamentaux	21
4.1. Mouvement de translation	21
4.1.1. Définition	21
4.1.2. Propriétés	21
4.1.3. Mouvement de translation rectiligne	21
4.1.4. Mouvement de translation circulaire	21
4.2. Mouvement de rotation	21
4.2.1. Définition	21
4.2.2. Propriétés	22
5. Étude cinématique du contact entre deux solides	23
5.1. Vecteur vitesse de glissement en un point entre deux solides	23
5.1.1. Définition	23
5.1.2. Projection du vecteur vitesse de glissement	24

6. Mouvement plan	25
6.1. Définition	25
6.2. Centre instantané de rotation	25
6.2.1. Base et roulante	26
6.2.2. Profils conjugués	27
 II. Statique	 29
7. Torseur statique	31
7.1. Ensemble matériel isolé.	31
7.2. Les efforts extérieurs	31
7.2.1. Le torseur statique	31
7.2.2. Exemples de torseurs statiques	31
7.2.2.1. Torseur statique associé à une force.	31
7.2.2.2. Torseur statique associé à un moment.	32
7.2.2.3. Torseur statique associé au poids.	32
8. Étude du contact entre deux solides	33
8.1. Modélisation des contacts indéformables	33
8.1.1. Cas du contact ponctuel parfait.	33
8.1.2. Cas du contact ponctuel réel	33
8.1.3. Cas du contact réel pseudo-ponctuel	34
8.1.4. Lois de coulomb	35
8.1.4.1. Cas de l'adhérence	35
8.1.4.2. Cas du frottement	36
8.1.4.3. Valeurs des facteurs de frottement et d'adhérence	36
8.2. Modélisation des solides déformables	37
 III. Cinétique	 39
9. Masse et inertie	41
9.1. masse	41
9.1.1. Définition	41
9.1.2. Principe de conservation de la masse	42
9.2. Centre d'inertie	42
9.2.1. Définition	42
9.2.2. Centre d'inertie d'un solide composé	43
9.2.3. Théorèmes de Guldin	43
9.2.3.1. Cas d'une surface	43
9.2.3.2. Cas d'une ligne	43
9.3. Opérateurs d'inertie	44
9.3.1. Moment d'inertie	44
9.3.1.1. Généralités	44
9.3.1.2. Moment d'inertie par rapport à un point	44

9.3.1.3.	Moment d'inertie par rapport à une droite	44
9.3.1.4.	Produit d'inertie par rapport à un plan	45
9.3.1.5.	Rayon de giration	45
9.3.1.6.	Moment et produit d'inertie dans un repère donné	45
9.3.1.7.	Relation entre les moments d'inerties	46
9.3.2.	Opérateur d'inertie en un point	46
9.3.2.1.	Définition	46
9.3.2.2.	Expression dans un repère	46
9.3.2.3.	Nouvelle expression des moments et produits d'inertie	47
9.3.2.4.	Axes principaux d'inertie	47
9.3.3.	Changement de repère et matrice d'inertie	48
9.3.3.1.	Changement d'origine (Théorème de Huyghens)	48
9.3.3.2.	Changement de base	49
9.3.4.	Conditions de symétrie	50
9.3.4.1.	Symétrie par rapport à un plan	50
9.3.4.2.	Symétrie par rapport à une droite	50
10.	Torseur cinétique et dynamique	51
10.1.	Torseur cinétique	51
10.1.1.	Définition	51
10.1.2.	Autre expression de la résultante cinétique	51
10.1.3.	Autre expression du moment cinétique	51
10.1.4.	Autre définition du torseur cinétique	52
10.2.	Torseur dynamique	52
10.2.1.	Définition	52
10.2.2.	Autre expression de la résultante dynamique	52
10.2.3.	Relation entre le moment dynamique et le moment cinétique	53
10.3.	Énergie cinétique d'un solide	53
10.3.1.	Définition	53
IV.	Énoncés fondamentaux	55
11.	Principe fondamental de la statique (PFS)	57
12.	Principe fondamental de la dynamique (PFD)	59
12.1.	Énoncé	59
12.2.	Repère galiléen et chronologie galiléenne	59
12.3.	Équations du mouvement	59
13.	Principe des actions mutuelles	61
14.	Approche énergétique	63
14.1.	Puissance	63
14.1.1.	Puissance des efforts extérieurs	63
14.1.1.1.	Définition de la puissance dans le cas général	63

14.1.1.2. Définition de la puissance dans le cas d'un solide indéformable	63
14.1.2. Puissance entre deux ensembles matériels	63
14.1.2.1. Définition générale	63
14.2. Travail	64
14.2.1. Définition	64
14.3. Énergie potentielle	64
14.3.1. Définition	64
14.3.2. Définition dans le cas d'actions mutuelles	64
14.4. Théorèmes de l'énergie cinétique	64
14.4.1. Cas d'un seul solide	64
14.4.2. Cas d'un ensemble de solides	64
V. Liaisons, Mécanismes	67
15. Liaisons mécaniques	69
15.1. Notion de degrés de liberté.	69
15.2. Torseur cinématique d'une liaison mécanique.	70
15.3. Effort transmissible par une liaison mécanique	70
15.4. Liaisons mécaniques élémentaires normalisées.	72
15.5. Torseur des petits déplacements	72
15.5.1. Position du problème	72
15.5.2. Relation entre les composantes des vecteurs déplacements.	72
15.5.3. Définition du torseur des petits déplacements	74
16. Étude des mécanismes	75
16.1. Liaisons en parallèle	75
16.1.1. Définition	75
16.1.2. Étude statique de la liaison équivalente	75
16.1.3. Étude cinématique de la liaison équivalente	76
16.2. Liaisons en série	78
16.2.1. Mécanisme à chaîne ouverte	78
16.2.1.1. Définition	78
16.2.2. Étude statique de la liaison équivalente	78
16.2.3. Étude cinématique de la liaison équivalente	78
16.3. Mécanisme à chaîne fermée	79
16.3.1. Définition	79
16.3.2. Loi d'entrée sortie	79
16.3.3. Étude cinématique	79
16.3.4. Étude statique	80
16.3.5. Bilan	80
16.4. Mécanisme à chaîne complexe	80
16.4.1. Définitions	80
16.4.2. Étude cinématique	81
16.4.3. Étude statique	82

16.4.4. Bilan	82
-------------------------	----

Première partie .

Cinématique

1. Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point d'un solide

1.1. Étude du mouvement

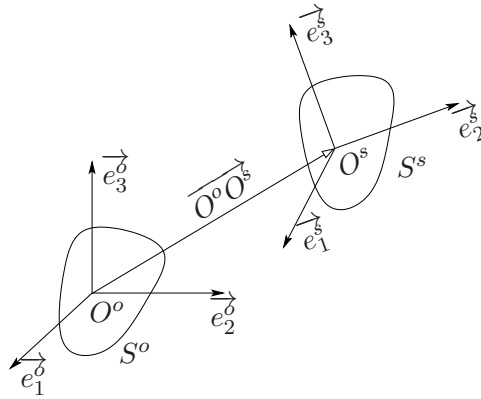


FIGURE 1.1.: Mouvement.

La cinématique permet de caractériser le mouvement d'un solide par rapport à un autre solide. Nous considérons que l'un des deux solides (S^o) sert de référence. Il est considéré fixe. L'autre solide (S^s) est mobile, nous désirons étudier son mouvement ; Pour cela nous attachons à chaque solide un repère. Nous noterons R^o et R^s les repères respectivement attachés à S^o et S^s . Étudier le mouvement de S^s par rapport à S^o reviendra à étudier le mouvement de R^s par rapport à R^o .

Le mouvement d'un repère par rapport à un autre, se caractérise par deux mouvements élémentaires : un mouvement de translation et un mouvement de rotation (figure 15.1). La translation est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{O^o O^s}$, défini par trois paramètres (composantes du vecteur), et la rotation par l'orientation relative des repères. Celle-ci est définie par une matrice de rotation. La matrice de rotation est définie à partir de trois paramètres (angles). Au total, le mouvement va être représenté par six paramètres que l'on appelle les six degrés de liberté du solide S^s .

1.2. Vecteur position d'un point du solide

Soit t la variable qui mesure le temps. Soit (S^s) un solide en mouvement par rapport au repère $R^o(O^o, \vec{e}_1^o, \vec{e}_2^o, \vec{e}_3^o)$. Au cours de ce mouvement, un point $M(t)$ quelconque du solide (S^s) décrit dans le repère R^o une courbe (C). (C) est appelée la trajectoire de M dans le repère R^o .

Le vecteur position du point $M(t)$ du solide (S^s), dans le repère R^o , à la date t , est le vecteur $\overrightarrow{O^o M}(t)$.

Le référentiel du mouvement est constitué du repère de référence R^o et d'une horloge mesurant le temps t .

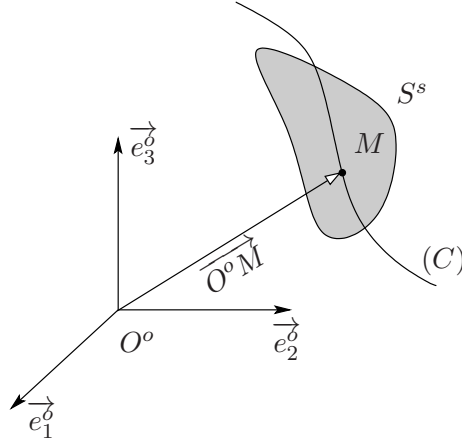


FIGURE 1.2.: Vecteur position.

1.3. Vecteur vitesse d'un point du solide

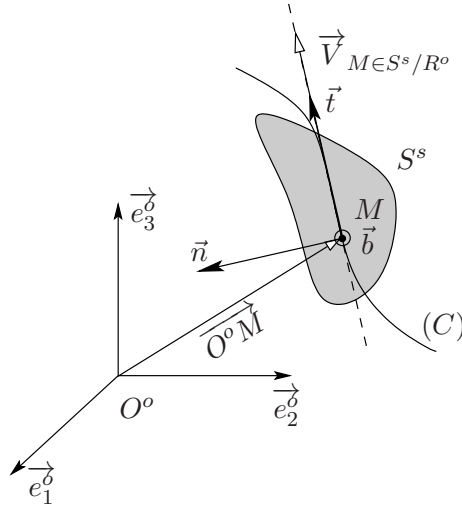


FIGURE 1.3.: Vecteur vitesse.

Le vecteur vitesse du point $M(t)$ du solide (S^s) par rapport au repère R^o , à la date t , est la dérivée par rapport à t , pour un observateur lié au repère R^o , du vecteur position $\overrightarrow{O^oM}(t)$.

$$\vec{V}_{M \in S^s / R^o} = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{O^oM}(t) \right|_{B^o} \quad (1.1)$$

- Le vecteur vitesse $\vec{V}_{M \in S^s / R^o}$ a la même direction que la tangente à la trajectoire (C) au point (M) .
- La vitesse a pour unité le $\frac{m}{s}$.

Remarque : En toute rigueur, la vitesse du point M appartenant au solide (S^s) par rapport au repère R^o est notée $\vec{V}_{M \in S^s / R^o}$. Si il n'y a pas de doute sur l'appartenance de M à (S^s) , on simplifie l'écriture par \vec{V}_{M / R^o} .

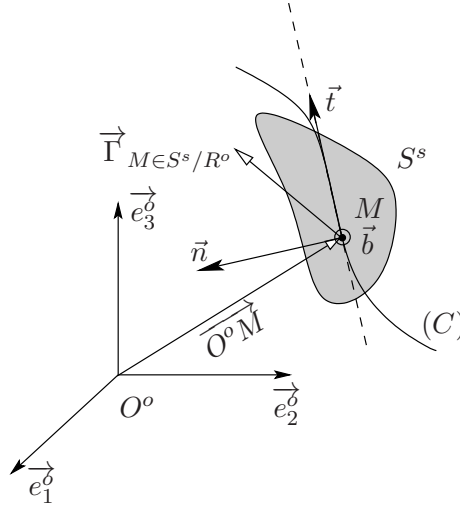


FIGURE 1.4.: Vecteur accélération.

1.4. Vecteur accélération d'un point du solide

Le vecteur accélération du point $M(t)$ du solide (S^s) par rapport au repère R^o , à la date t , est la dérivée par rapport à t , pour un observateur lié au repère R^o , du vecteur vitesse $\vec{V}_{M \in S^s / R^o}$.

$$\vec{\Gamma}_{M \in S^s / R^o} = \frac{d}{dt} \vec{V}_{M \in S^s / R^o} \Big|_{B^o} \quad (1.2)$$

- L'accélération a pour unité le $\frac{m}{s^2}$.

2. Champ des vecteurs vitesse et accélération des points d'un solide

2.1. Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide

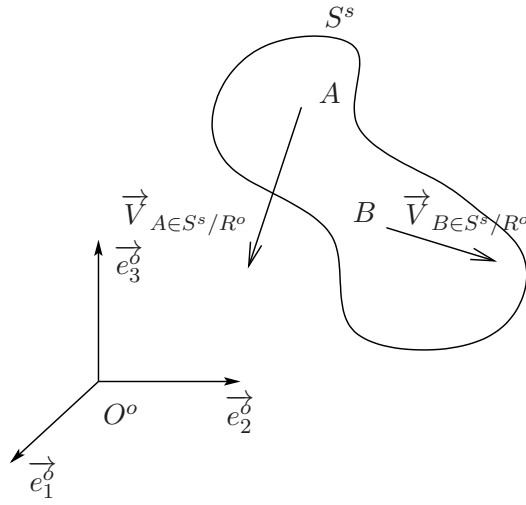


FIGURE 2.1.: Champ des vecteurs vitesse.

Soit (S^s) un solide en mouvement par rapport à un repère R^o . Soit A et B deux points distincts de (S^s) . La relation entre les vecteurs vitesse \vec{V}_{A/R^o} et \vec{V}_{B/R^o} s'écrit :

$$\vec{V}_{B \in S^s / R^o} = \vec{V}_{A \in S^s / R^o} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{B^s / B^o} \quad (2.1)$$

$$= \vec{V}_{A \in S^s / R^o} + \vec{\Omega}_{B^s / B^o} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (2.2)$$

Démonstration :

La formule de la base mobile permet d'écrire :

$$\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right|_{B^o} = \underbrace{\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right|_{B^s}}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}_{B^s / B^o} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (2.3)$$

et

$$\left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right|_{B^o} = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{AO} \right|_{B^o} + \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{OB} \right|_{B^o} = -\vec{V}_{A \in S^s / R^o} + \vec{V}_{B \in S^s / R^o} \quad (2.4)$$

d'où l'on déduit la relation (2.1).

2.2. Torseur cinématique

D'après le théorème de Delassus, la relation (2.1) indique que le champ des vecteurs vitesse est le champ des moments d'un torseur. Celui-ci est appelé torseur distributeur des vecteurs vitesse ou torseur cinématique.

Le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide (S^s) dans son mouvement par rapport au repère R^o est défini par le torseur suivant :

$$T_{c_{S^s/R^o}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \\ \vec{V}_{A \in S^s/B^o} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \\ \vec{V}_{B \in S^s/B^o} \end{array} \right\}_B \quad (2.5)$$

Ce torseur est appelé torseur cinématique du solide (S^s) dans son mouvement par rapport au repère R^o .

2.3. Propriétés du torseur cinématique

2.3.1. Axe central du torseur cinématique

On considère le mouvement d'un solide (S^b) dans son mouvement par rapport à un autre solide (S^a). Le torseur cinématique caractérisant ce mouvement est :

$$T_{c_{S^b/S^a}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S^b/S^a} \\ \vec{V}_{A \in S^b/S^a} \end{array} \right\}_A \quad (2.6)$$

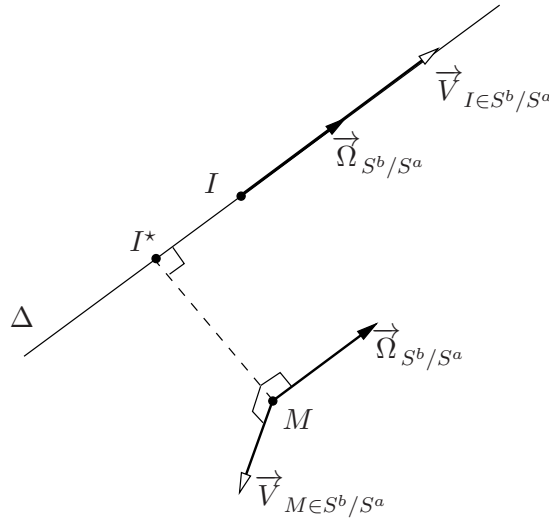


FIGURE 2.2.: Axe central.

Dans le cas général, les 2 composantes du torseur cinématique ne sont pas collinéaires. Il existe un ensemble de positions privilégiées où les 2 composantes sont collinéaires. Soit I , un de ces points, on a :

$$\vec{V}_{I \in S^b/S^a} = \lambda \vec{\Omega}_{S^b/S^a} \quad (2.7)$$

- Le point I s'appelle un point central.
- L'ensemble des points I , au même instant t , forment une droite : l'axe central Δ .
- L'axe central est parallèle à $\vec{\Omega}_{S^b/S^a}$.

La recherche de l'axe central peut se faire à partir du torseur :

$$T_{c_{S^b/S^a}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S^b/S^a} \\ \vec{V}_{M \in S^b/S^a} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

en calculant le vecteur $\overrightarrow{MI^*}$:

$$\overrightarrow{MI^*} = \frac{\vec{\Omega}_{S^b/S^a} \wedge \vec{V}_{M \in S^b/S^a}}{\vec{\Omega}_{S^b/S^a} \cdot \vec{\Omega}_{S^b/S^a}} \quad (2.9)$$

I^* est la projection orthogonale de M sur Δ . $\overrightarrow{MI^*}$ est perpendiculaire à $\vec{\Omega}_{S^b/S^a}$.

Dans le mouvement relatif de S^b par rapport à S^a , l'axe central du torseur cinématique est l'axe instantané autour duquel S^b tourne autour de S^a , tout en se déplaçant en translation rectiligne suivant cet axe. Cette translation est nulle quand $\vec{V}_{I \in S^b/S^a} = \vec{0}$.

2.3.2. Axiïdes

Dans le cas d'un mouvement général on s'intéressera au mouvement de l'axe instantané de rotation Δ par rapport à S^b ou par rapport à S^a . Δ va décrire deux surfaces réglées¹ que l'on appelle les axiïdes.

2.4. Equiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide

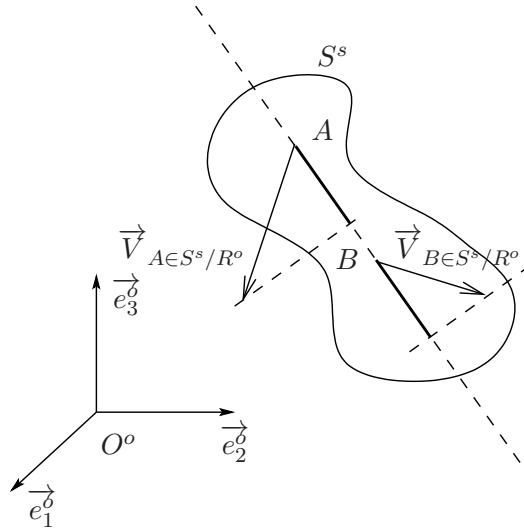


FIGURE 2.3.: Equiprojectivité des vitesses.

Le champ des vecteurs vitesse est un champ des moments d'un torseur, il est donc équijectif. On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_{A \in S^s/R^o} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_{B \in S^s/R^o} \quad (2.10)$$

1. Surfaces générées par des droites.

2.5. Champ des vecteurs accélération des points d'un solide

La relation entre l'accélération de deux points A et B d'un solide M est donnée par :

$$\vec{\Gamma}_{B/R^o} = \vec{\Gamma}_{A/R^o} + \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \Big|_{B^o} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \wedge \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \Big|_{B^o} \quad (2.11)$$

$$= \vec{\Gamma}_{A/R^o} + \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \Big|_{B^o} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \wedge \left(\vec{\Omega}_{B^s/B^o} \wedge \overrightarrow{AB} \right) \quad (2.12)$$

Le champ des accélérations des points d'un solide n'est pas représentable par un torseur.

3. Composition des mouvements

3.1. Composition des vecteurs vitesses

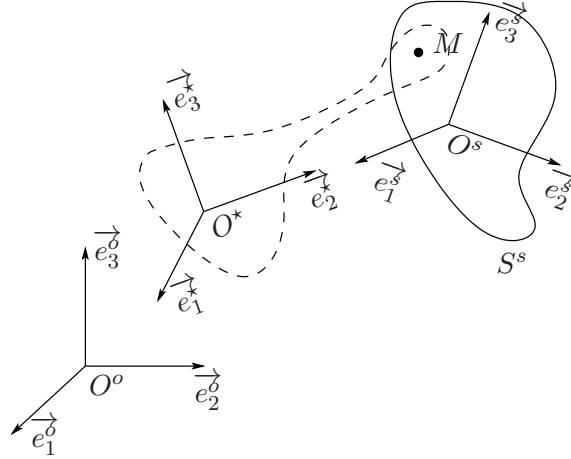


FIGURE 3.1.: Composition des vecteurs vitesses.

Soit un solide (S^s) en mouvement par rapport à deux repères $R^o(O^o, \vec{e}_1^o, \vec{e}_2^o, \vec{e}_3^o)$ et $R^*(O^*, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$ eux-mêmes en mouvement l'un par rapport à l'autre. Soit M un point du solide (S^s). La relation entre \vec{V}_{M/R^o} et \vec{V}_{M/R^*} s'écrit :

$$\vec{V}_{M \in S^s / R^o} = \vec{V}_{M \in S^s / R^*} + \vec{V}_{M \in R^* / R^o} \quad (3.1)$$

- $\vec{V}_{M \in S^s / R^o}$ est appelé vecteur vitesse absolue,
- $\vec{V}_{M \in S^s / R^*}$ est appelé vecteur vitesse relative,
- $\vec{V}_{M \in R^* / R^o}$ est appelé vecteur vitesse d'entraînement.

Comme M est un point de (S^s) la relation de composition des vitesses s'écrit aussi :

$$\vec{V}_{M/R^o} = \vec{V}_{M/R^*} + \vec{V}_{M \in R^* / R^o} \quad (3.2)$$

Remarque : $\vec{V}_{M \in R^* / R^o} = -\vec{V}_{M \in R^o / R^*}$

3.2. Composition des vecteurs rotation

Soit un solide (S^s) en mouvement par rapport à deux repères $R^o(O^o, \vec{e}_1^o, \vec{e}_2^o, \vec{e}_3^o)$ et $R^*(O^*, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$ eux-mêmes en mouvement l'un par rapport à l'autre. Il existe la relation suivante entre les différents vecteurs rotation :

$$\vec{\Omega}_{B^s/B^o} = \vec{\Omega}_{B^s/B^*} + \vec{\Omega}_{B^*/B^o} \quad (3.3)$$

3.3. Composition des torseurs cinématiques

A partir des relations précédentes nous pouvons écrire la relation de composition des torseurs cinématiques :

$$T_{cS^s/R^o} = T_{cS^s/R^*} + T_{cR^*/R^o} \quad (3.4)$$

3.4. Composition des vecteurs accélération

La composition des vecteurs accélération s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_{M \in S^s/R^o} = \vec{\Gamma}_{M \in S^s/R^*} + \vec{\Gamma}_{M \in R^*/R^o} + 2\vec{\Omega}_{B^*/B^o} \wedge \vec{V}_{M \in S^s/R^*} \quad (3.5)$$

- $\vec{\Gamma}_{M \in S^s/R^o}$ est appelé vecteur accélération absolue,
- $\vec{\Gamma}_{M \in S^s/R^*}$ est appelé vecteur accélération relative,
- $\vec{\Gamma}_{M \in R^*/R^o}$ est appelé vecteur accélération d'entraînement,
- $2\vec{\Omega}_{B^*/B^o} \wedge \vec{V}_{M \in S^s/R^*}$ est appelé vecteur accélération de Coriolis.

4. Mouvements fondamentaux

4.1. Mouvement de translation

4.1.1. Définition

Un solide (S^s) est animé d'un mouvement de translation si un vecteur attaché à ce solide ne change pas de direction au cours du mouvement

4.1.2. Propriétés

Dans un mouvement de translation, le vecteur rotation est nul : $\vec{\Omega}_{B^s/B^o} = \vec{0}$.

Le torseur cinématique du mouvement de translation $T_{c_{S^s/R^o}}$ est un torseur de type couple. Il est de la forme :

$$T_{c_{S^s/R^o}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}_{M \in S^s/R^o} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Le vecteur vitesse $\vec{V}_{M \in S^s/R^o}$ est identique pour tout point M de (S^s).

L'axe central du mouvement n'existe pas car $\vec{\Omega}_{B^s/B^o} = \vec{0}$.

4.1.3. Mouvement de translation rectiligne

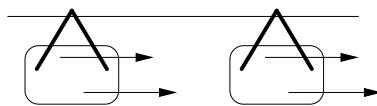


FIGURE 4.1.: Translation rectiligne.

La trajectoire d'un point de (S^s) est une droite.

4.1.4. Mouvement de translation circulaire

La trajectoire d'un point de (S^s) est un cercle.

4.2. Mouvement de rotation

4.2.1. Définition

Un solide (S^s) à un mouvement de rotation si deux points, M et N , de ce solide ont une vitesse nulle.

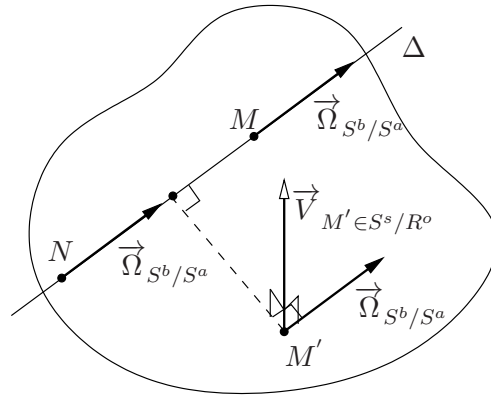


FIGURE 4.2.: Mouvement de rotation

4.2.2. Propriétés

Le torseur cinématique $T_{c_{S^s/R^o}}$ caractéristique du mouvement de rotation, est un glisseur :

$$T_{c_{S^s/R^o}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_N \quad (4.2)$$

Les points M et N appartiennent à l'axe central (Δ) du torseur.

Pour un point M' n'appartenant pas à l'axe central nous avons $\vec{\Omega}_{B^s/B^o} \perp \vec{V}_{M' \in S^s/R^o}$.

5. Étude cinématique du contact entre deux solides

5.1. Vecteur vitesse de glissement en un point entre deux solides

5.1.1. Définition

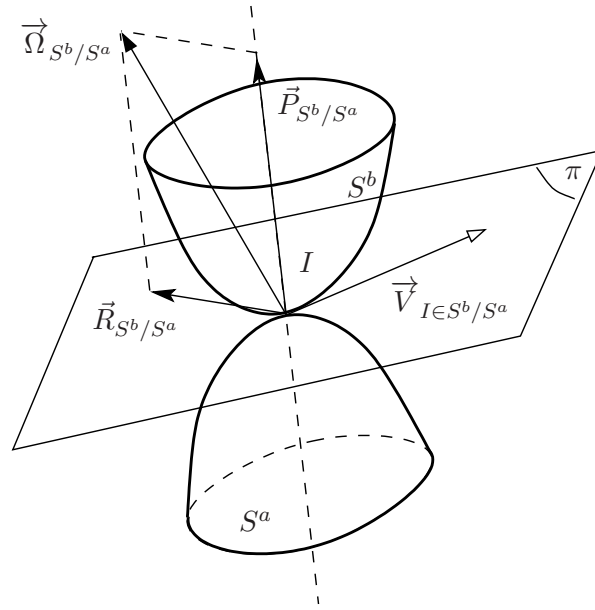


FIGURE 5.1.: Vecteur vitesse de glissement.

Considérons deux solides \$(S^a)\$ et \$(S^b)\$ en contact ponctuel au point \$I\$. Le torseur cinématique du solide \$(S^a)\$ par rapport au repère \$R^o\$ est donné par :

$$T_{c_{S^a/R^o}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S^a/B^o} \\ \vec{V}_{I \in S^a/R^o} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Le torseur cinématique du solide \$(S^b)\$ par rapport au repère \$R^o\$ est donné par :

$$T_{c_{S^b/R^o}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S^b/B^o} \\ \vec{V}_{I \in S^b/R^o} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

La torseur cinématique du solide \$(S^b)\$ par rapport au solide \$(S^a)\$ sera :

$$T_{c_{S^b/S^a}} = T_{c_{S^b/R^o}} - T_{c_{S^a/R^o}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S^b/S^a} = \vec{\Omega}_{S^b/B^o} - \vec{\Omega}_{S^a/B^o} \\ \vec{V}_{I \in S^b/S^a} = \vec{V}_{I \in S^b/R^o} - \vec{V}_{I \in S^a/R^o} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

– \$\vec{V}_{I \in S^b/S^a}\$ est le vecteur vitesse de glissement au point \$I\$ du solide \$(S^b)\$ par rapport au solide \$(S^a)\$.

5. Étude cinématique du contact entre deux solides

- $\vec{V}_{I \in S^b/S^a}$ est parallèle au plan tangent commun en I à (S^a) et (S^b) .
- Si $\vec{V}_{I \in S^b/S^a} = \vec{0}$ alors (S^b) roule sans glisser sur (S^a) .

5.1.2. Projection du vecteur vitesse de glissement

Soit (π) le plan tangent commun à (S^a) et (S^b) passant par I (voir figure 5.1). Soit \vec{n} le vecteur normal à (π) passant par I , et orienté de (S^b) vers (S^a) .

Le vecteur $\vec{\Omega}_{S^b/S^a}$ se décompose en deux composantes : $\vec{\Omega}_{S^b/S^a} = \vec{P}_{S^b/S^a} + \vec{R}_{S^b/S^a}$. \vec{P}_{S^b/S^a} est la composante suivant \vec{n} :

$$\vec{P}_{S^b/S^a} = \vec{\Omega}_{S^b/S^a} \cdot \vec{n} \vec{n} \quad (5.4)$$

et \vec{R}_{S^b/S^a} la composante dans le plan (π) :

$$\vec{R}_{S^b/S^a} = \vec{\Omega}_{S^b/S^a} - \vec{\Omega}_{S^b/S^a} \cdot \vec{n} \vec{n} = \vec{n} \wedge (\vec{\Omega}_{S^b/S^a} \wedge \vec{n}) \quad (5.5)$$

- \vec{P}_{S^b/S^a} est le vecteur pivotement en I de (S^b) par rapport à (S^a) .
- \vec{R}_{S^b/S^a} est le vecteur roulement en I de (S^b) par rapport à (S^a) .

6. Mouvement plan

6.1. Définition

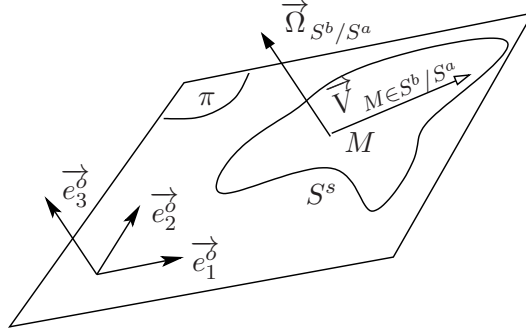


FIGURE 6.1.: Mouvement plan.

Un solide (S^s) est animé d'un mouvement plan par rapport au repère R^o si tous les points du solide ont une trajectoire située dans un même plan (π).

Considérons trois points non alignés A, B, C de (π). Nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{B \in S^s / R^o} &= \vec{V}_{A \in S^s / R^o} + \vec{\Omega}_{B^s / B^o} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \vec{V}_{B \in S^s / R^o} - \vec{V}_{A \in S^s / R^o} &= \vec{\Omega}_{B^s / B^o} \wedge \overrightarrow{AB} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\vec{V}_{B \in S^s / R^o} - \vec{V}_{A \in S^s / R^o} = \vec{\Omega}_{B^s / B^o} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (6.2)$$

$$\vec{V}_{C \in S^s / R^o} = \vec{V}_{A \in S^s / R^o} + \vec{\Omega}_{B^s / B^o} \wedge \overrightarrow{CB} \quad (6.3)$$

$$\vec{V}_{C \in S^s / R^o} - \vec{V}_{A \in S^s / R^o} = \vec{\Omega}_{B^s / B^o} \wedge \overrightarrow{CB} \quad (6.4)$$

$\vec{V}_{B \in S^s / R^o} - \vec{V}_{A \in S^s / R^o}$, $\vec{V}_{C \in S^s / R^o} - \vec{V}_{A \in S^s / R^o}$, \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CB} appartiennent au même plan (π), par conséquent $\vec{\Omega}_{B^s / B^o}$ est perpendiculaire à ce plan.

Le torseur cinématique de (S^s) par rapport à R^o en M s'écrit :

$$T_{c_{S^s / R^o}} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{B^s / B^o} = \omega \vec{e}_3^o \\ \vec{V}_{M \in S^s / R^o} = u_1 \vec{e}_1^o + u_2 \vec{e}_2^o \end{array} \right. \quad (6.5)$$

6.2. Centre instantané de rotation

L'axe central est colinéaire à $\vec{\Omega}_{S^s / R^o}$, par conséquent il coupe le plan en un point. Ce point s'appelle le centre instantané de rotation (CIR). Nous le notons I . Nous avons évidemment :

$$\vec{V}_{I \in S^s / R^o} = \vec{0} \quad (6.6)$$

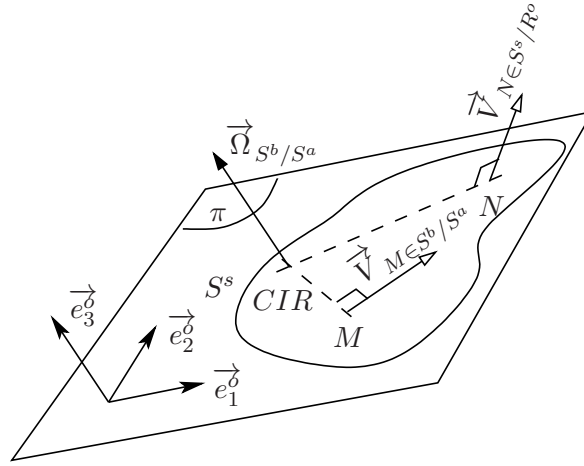


FIGURE 6.2.: CIR.

Le torseur (6.5) s'écrit en I :

$$T_{c_{S^s/R^o}} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \\ \vec{V}_{I \in S^s/R^o} = \vec{V}_{M \in S^s/R^o} + \overrightarrow{IM} \wedge \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \end{array} \right. \quad (6.7)$$

(6.6) et (6.7) permettent d'écrire :

$$\vec{V}_{M \in S^s/R^o} = \overrightarrow{MI} \wedge \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \quad (6.8)$$

par conséquent $\vec{V}_{M \in S^s/R^o}$ et \overrightarrow{MI} , qui appartiennent au plan (π) , sont perpendiculaires. Il s'en suit que la connaissance de la vitesse relative en deux points distincts suffit à définir I .

6.2.1. Base et roulante

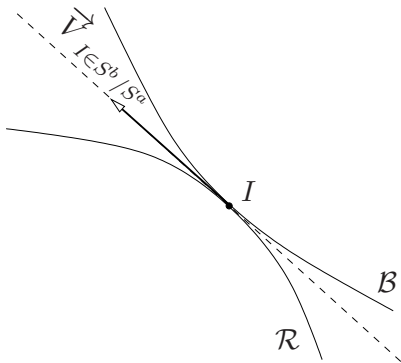
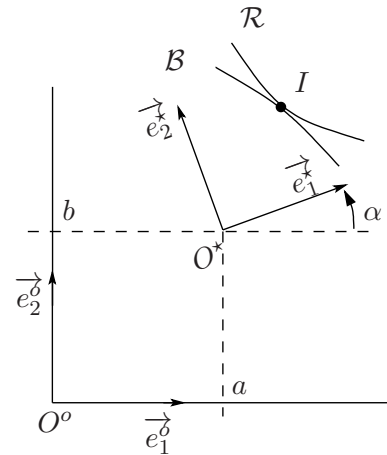


FIGURE 6.3.: Base et roulante.


 FIGURE 6.4.: Recherche analytique de \mathcal{B} et \mathcal{R} .

Un observateur lié à R^o voit le CIR décrire une courbe appelée base \mathcal{B} du mouvement. De même, la trace du CIR pour un opérateur lié à R^s forme une courbe appelée roulante \mathcal{R} du mouvement (voir

figure 6.3).

A chaque instant, la roulante est en contact avec la base au point I . La roulante roule sans glisser sur la base car $\vec{V}_{I \in S^s/S^o} = \vec{0}$.

Tout mouvement plan sur plan peut se ramener au roulement sans glissement de la roulante sur la base.

La base est l'ensemble des points $I(x_1^o, x_2^o)$ dans le repère $R^o(O^o, \vec{e}_1^o, \vec{e}_2^o, \vec{e}_3^o)$ fixe, dont les coordonnées paramétriques sont (voir figure 6.4) :

$$x_1^o = a - \frac{1}{\alpha} \dot{b} \quad (6.9)$$

$$x_2^o = b + \frac{1}{\alpha} \dot{a} \quad (6.10)$$

avec $\vec{O^o O^s} = a \vec{e}_1^o + b \vec{e}_2^o$.

La roulante est l'ensemble des points $I(x_1^s, x_2^s)$ dans le repère $R^s(O^s, \vec{e}_1^s, \vec{e}_2^s, \vec{e}_3^s)$ fixe, dont les coordonnées paramétriques sont :

$$x_1^s = \frac{1}{\alpha} \left(\dot{a} \sin \alpha - \dot{b} \cos \alpha \right) \quad (6.11)$$

$$x_2^s = \frac{1}{\alpha} \left(\dot{a} \cos \alpha + \dot{b} \sin \alpha \right) \quad (6.12)$$

6.2.2. Profils conjugués

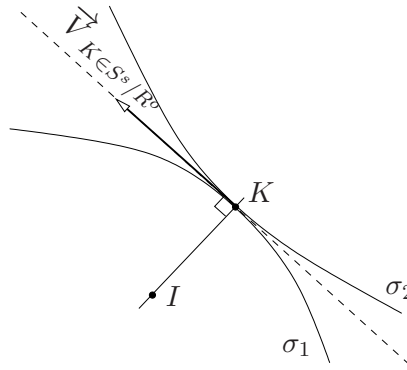


FIGURE 6.5.: Profils conjugués.

Soit une courbe convexe σ_2 lié à (S^s) . Dans le mouvement relatif de (S^s) par rapport à R^o , σ_2 admet une courbe enveloppe¹ σ_1 dans R^o (voir figure 6.5).

σ_1 et σ_2 sont appelés profils conjugués dans le mouvement de (S^s) par rapport à R^o .

Le mouvement de σ_1 par rapport σ_2 est un mouvement de roulement avec glissement. En effet si l'on nomme K le point de contact entre σ_1 et σ_2 , on peut écrire :

$$\vec{V}_{K \in S^s/R^o} = \vec{V}_{I \in S^s/R^o} + \vec{KI} \wedge \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \quad (6.13)$$

$$= \vec{KI} \wedge \vec{\Omega}_{B^s/B^o} \quad (6.14)$$

1. σ_1 reste constamment tangente à σ_2 dans le mouvement de (S^s) par rapport à R^o .

6. *Mouvement plan*

Le CIR est situé sur la normale en K aux profils conjugués σ_1 et σ_2 .

Deuxième partie .

Statique

7. Torseur statique

7.1. Ensemble matériel isolé.

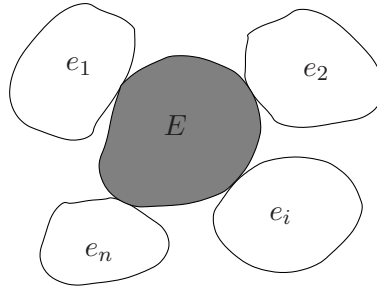


FIGURE 7.1.: Isolement d'un système matériel.

L'ensemble matériel E est en contact avec le milieu extérieur e . Celui-ci est composé de n ensembles matériels e_i . On a $e = \sum_i^n e_i$. Isoler E consiste à le soustraire mentalement du milieu qui l'entoure.

Le milieu extérieur est remplacé par des actions mécaniques que l'on appelle les efforts extérieurs.

7.2. Les efforts extérieurs

7.2.1. Le torseur statique

Chaque effort extérieur crée un champ de force que l'on peut exprimer sous la forme d'un torseur. Ce torseur s'appelle le torseur statique ou le torseur de l'action extérieure de e sur le solide S .

On note ce torseur $T_s^{e \rightarrow S}$

l'intensité de la force est exprimée en Newton ($1 N = 1 \frac{kg m}{s^2}$).

7.2.2. Exemples de torseurs statiques

7.2.2.1. Torseur statique associé à une force.

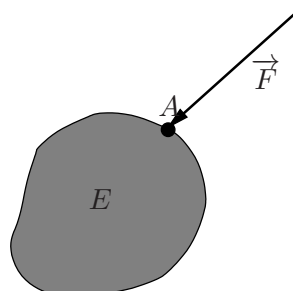


FIGURE 7.2.: Torseur statique associé à une force.

7. Torseur statique

On considère que le milieu extérieur e exerce une force extérieure \vec{F} en A sur S . Le torseur statique associé à la force s'exprime en A par :

$$T_s^{e \rightarrow S} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad (7.1)$$

7.2.2.2. Torseur statique associé à un moment.

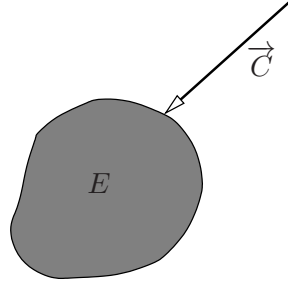


FIGURE 7.3.: Torseur statique associé à un moment.

On considère que le milieu extérieur e exerce un moment \vec{C} appliqué au point A , sur le solide S . Le torseur statique associé au moment s'exprime au point A par :

$$T_s^{e \rightarrow S} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C} \end{array} \right\}_A \quad (7.2)$$

7.2.2.3. Torseur statique associé au poids.

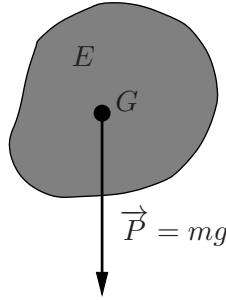


FIGURE 7.4.: Poids d'un corps.

Le poids est un vecteur dirigé vers le bas. Son point d'application est le centre gravité G du solide. On a :

$$\vec{P} = m \vec{g} \quad (7.3)$$

m est la masse du corps. \vec{g} est l'accélération de la pesanteur ($\|\vec{g}\| = 9.81 m/s^2$). Le torseur statique associé au poids s'exprime au point G par :

$$T_s^{e \rightarrow S} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \quad (7.4)$$

8. Étude du contact entre deux solides

L'étude du contact entre deux solides est une science à part entière : la tribologie. Nous en donnons ici quelques notions élémentaires, utiles à l'ingénieur pour la modélisation des mécanisme.

8.1. Modélisation des contacts indéformables

8.1.1. Cas du contact ponctuel parfait.

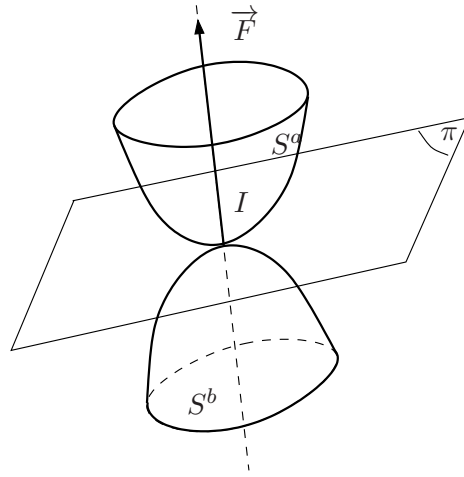


FIGURE 8.1.: Contact parfait.

Le contact est défini par deux surfaces \$(S^a)\$ et \$(S^b)\$. \$(\pi)\$ est le plan tangent aux deux surfaces. \$(S^b)\$ exerce sur \$(S^a)\$ une force au point de contact \$I\$ des deux surfaces. Cette force est normale au plan \$(\pi)\$. On a :

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \vec{n} \quad (8.1)$$

Le torseur statique des forces de contact de \$(S^b)\$ sur \$(S^a)\$ s'exprime par :

$$T_s^{S^b \rightarrow S^a} = \begin{cases} \vec{F} = \|\vec{F}\| \vec{n} \\ \vec{0} \end{cases}_I \quad (8.2)$$

8.1.2. Cas du contact ponctuel réel

On suppose que les solides \$(S^a)\$ et \$(S^b)\$ sont en contact au point \$I\$. La force de contact exercée par \$(S^b)\$ sur \$(S^a)\$ est notée \$\vec{F}\$. Elle est définie à l'aide de deux composantes :

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t \quad (8.3)$$

- une composante normale \$\vec{F}_n = \vec{F} \cdot \vec{n} \vec{n}\$, de direction normale au plan \$(\pi)\$,

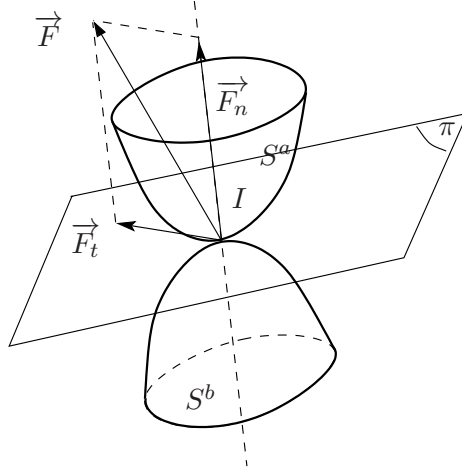


FIGURE 8.2.: Contact ponctuel réel.

- une composante tangentielle $\vec{F}_t = \vec{n} \wedge (\vec{F} \wedge \vec{n})$, dont la direction appartient au plan (π) .

Le torseur statique des forces de contact de (S^b) sur (S^a) s'exprime par :

$$T_s^{S^b \rightarrow S^a} = \begin{cases} \vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n = \vec{F} \cdot \vec{n} \vec{n} + \vec{n} \wedge (\vec{F} \wedge \vec{n}) \\ \vec{0} \end{cases}_I \quad (8.4)$$

8.1.3. Cas du contact réel pseudo-ponctuel

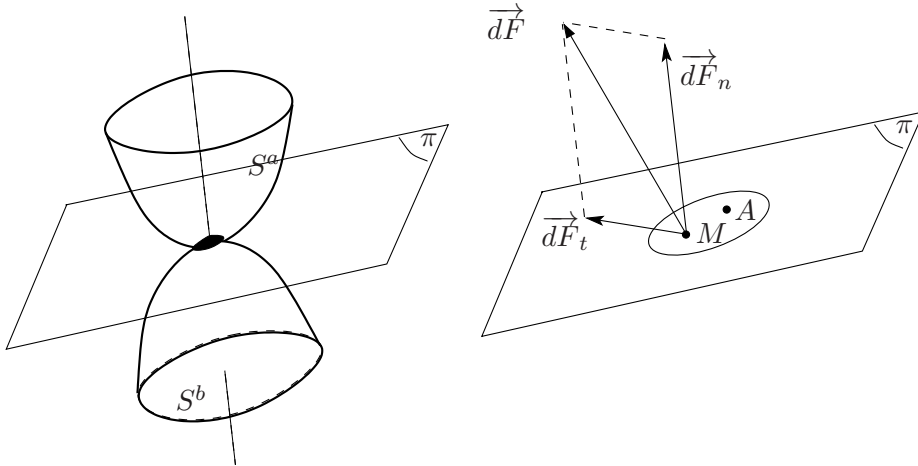


FIGURE 8.3.: Contact réel pseudo-ponctuel.

On suppose dans ce cas que le contact entre les solides (S^a) et (S^b) se fait sur une surface S . Sur un petit élément de surface dS , situé au point M de la surface S , le solide (S^b) va exercer sur le solide (S^a) une densité de force $d\vec{F}$. Cette densité de force se décompose par une composante normale et tangentielle. On a $d\vec{F} = d\vec{F}_n + d\vec{F}_t$ avec $d\vec{F}_n = d\vec{F} \cdot \vec{n} \vec{n}$ et $d\vec{F}_t = \vec{n} \wedge (d\vec{F} \wedge \vec{n})$.

Le torseur statique des forces de contact de (S^b) sur (S^a) s'exprime en un point A de S par :

$$T_s^{S^b \rightarrow S^a} = \begin{cases} \vec{F} = \int_S d\vec{F}_n + d\vec{F}_t \, dS \\ \vec{M}_{\vec{F}/A} = \int_S \vec{AM} \wedge (d\vec{F}_n + d\vec{F}_t) \, dS \end{cases} \quad (8.5)$$

$$= \begin{cases} \vec{F} = \int_S d\vec{F}_n + d\vec{F}_t \, dS \\ \vec{M}_{\vec{F}/A} = \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge (d\vec{F}_n + d\vec{F}_t) \, dS \end{cases} \quad (8.6)$$

8.1.4. Lois de coulomb

Nous avons vu que les efforts de contact se décomposaient en des composantes normale et tangentielle par rapport au plan (π) . Ces composantes normale et tangentielle sont reliées entre elles par des lois définies en fonction des conditions de contact et de la nature des matériaux. Ces lois portent le nom de lois de Coulomb. Nous traiterons ici uniquement les cas où nous avons frottement ou adhérence.

8.1.4.1. Cas de l'adhérence

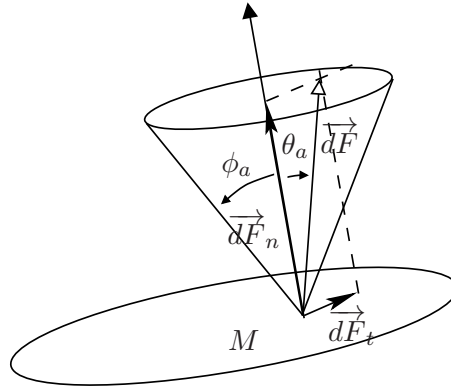


FIGURE 8.4.: Contact adhérent.

Dans le cas de l'adhérence il n'y a pas de mouvement relatif entre les solides (S^a) et (S^b) . La force élémentaire de contact $d\vec{F}$ en M fait avec la normale \vec{n} un angle θ_a inconnu (figure 8.4).

Par contre on sait que l'angle θ_a est tel que :

$$\theta_a < \varphi_a \quad (8.7)$$

L'angle φ_a est appelé angle d'adhérence. Il est fonction de la nature des matériaux en contact. On définit le facteur d'adhérence par :

$$f_a = \tan \varphi_a \quad (8.8)$$

Des valeurs usuelles de f_a sont données dans le tableau 8.1.

On écrit dans la cas de l'adhérence :

$$\|d\vec{F}_t\| \leq f_a \|d\vec{F}_n\| \quad (8.9)$$

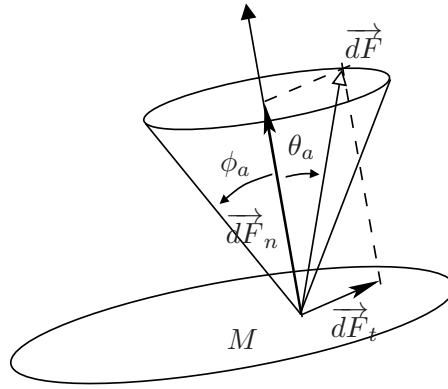


FIGURE 8.5.: Contact avec frottement.

8.1.4.2. Cas du frottement

Dans le cas du frottement il y a mouvement relatif entre les solides (S^a) et (S^b). La force élémentaire de contact $d\vec{F}$ en M fait avec la normale \vec{n} un angle θ_f fixe (figure 8.5). De plus $d\vec{F}$ appartient au plan formé par $(M, \vec{n}, \vec{V}_{M \in S^a/S^b})$. La direction de $d\vec{F}$ est opposée à celle de $\vec{V}_{M \in S^a/S^b}$. On a :

$$d\vec{F} \cdot \vec{V}_{M \in S^a/S^b} < 0 \quad (8.10)$$

Le facteur d'adhérence est défini par :

$$f_f = \tan \varphi_f \quad (8.11)$$

Nous avons également :

$$\|d\vec{F}_t\| = f_f \|d\vec{F}_n\| \quad (8.12)$$

8.1.4.3. Valeurs des facteurs de frottement et d'adhérence

Matériaux en contact	Valeur de f_f		Valeur de f_a	
	Contact sec	Contact lubrifié	Contact sec	Contact lubrifié
acier/acier	0.2	0.1	0.3	0.1
acier/fonte	0.2	0.05	0.3	0.07
acier/bronze	0.2	0.1	0.25	0.15
acier/graphite	0.09	0.05	0.12	0.1
acier/garniture de friction	0.3		0.35	
fonte/fonte	0.15	0.1	0.2	0.15
fonte/bronze	0.15	0.1	0.2	0.12
fonte sur graphite	0.1			
fonte sur garniture de friction	0.3		0.4	
cuir/métal	0.25		0.3	
acier/téflon	0.05	0.08	0.1	

TABLE 8.1.: Valeur du coefficient de frottement et d'adhérence (d'après [2]).

8.2. Modélisation des solides déformables

La modélisation des solides déformables fait appel à la théorie de Hertz. Cet aspect est traité en cours de technologie mécanique sur les guidages.

Troisième partie .

Cinétique

9. Masse et inertie

9.1. masse

9.1.1. Définition

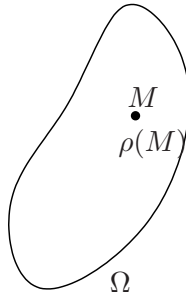


FIGURE 9.1.: Masse.

La masse d'un solide S est définie par la quantité de matière incluse à l'intérieur du volume Ω caractéristique du solide. Si $\rho(M)$ est la masse volumique du solide au point M nous écrirons :

$$m = \int_{M \in \Omega} \rho(M) d\Omega \quad (9.1)$$

Si la masse volumique est constante (solide homogène $\rho = \rho(M)$) la relation précédente devient :

$$m = \rho(M) \int_{M \in \Omega} d\Omega = \rho \Omega \quad (9.2)$$

Si le solide est composé de plusieurs solides S_i homogènes de masse m_i la masse m du solide résultant sera :

$$m = \sum_i m_i \quad (9.3)$$

Si le solide est assimilable à une surface Γ , la masse sera déterminée à partir de la masse surfacique du solide $\rho_s(M)$. On écrira :

$$m = \int_{M \in \Gamma} \rho_s(M) d\Gamma \quad (9.4)$$

Si le solide est assimilable à une ligne L , la masse sera déterminée à partir de la masse linéique du solide $\rho_l(M)$. On écrira :

$$m = \int_{M \in L} \rho_l(M) dL \quad (9.5)$$

9.1.2. Principe de conservation de la masse

La masse est une grandeur constante par rapport au temps. Par conséquent :

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = 0 \quad (9.6)$$

avec $dm = \rho d\Omega$

La relation suivante est une conséquence de ce principe. Nous pouvons écrire :

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\int_{M \in \Omega} f(M, t) dm \right) \right|_R = \int_{M \in \Omega} \left(\left. \frac{d}{dt} (f(M, t)) \right|_R \right) dm \quad (9.7)$$

où $f(M, t)$ est une fonction (éventuellement vectorielle) dépendante de M et du temps.

9.2. Centre d'inertie

9.2.1. Définition

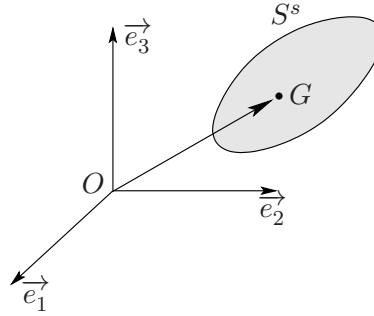


FIGURE 9.2.: Centre d'inertie

On appelle centre d'inertie du solide S le point G défini par :

$$\int_{M \in \Omega} \overrightarrow{GM} dm = \vec{0} \quad (9.8)$$

Si l'on introduit l'origine du repère O dans la relation précédente, nous pouvons écrire :

$$\vec{0} = \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{GM} dm = \int_{M \in \Omega} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}) dm \quad (9.9)$$

$$= \overrightarrow{GO} \int_{M \in \Omega} dm + \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{OM} dm \quad (9.10)$$

$$= \overrightarrow{GO} m + \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{OM} dm \quad (9.11)$$

d'où la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{OM} dm \quad (9.12)$$

En notant $\overrightarrow{OG} = x_\alpha^g \vec{e}_\alpha$ et $\overrightarrow{OM} = x_\alpha \vec{e}_\alpha$, nous obtenons la position du point G dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La relation précédente s'écrit :

$$x_1^g = \frac{1}{m} \int_{M \in \Omega} x_1 dm \quad (9.13)$$

$$x_2^g = \frac{1}{m} \int_{M \in \Omega} x_2 dm \quad (9.14)$$

$$x_3^g = \frac{1}{m} \int_{M \in \Omega} x_3 dm \quad (9.15)$$

9.2.2. Centre d'inertie d'un solide composé

Soit un solide S de centre d'inertie G et de masse m . Ce solide est composé de plusieurs parties de centre d'inertie G_i et de masse m_i . On écrira :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \overrightarrow{OG_i} \quad (9.16)$$

9.2.3. Théorèmes de Guldin

9.2.3.1. Cas d'une surface

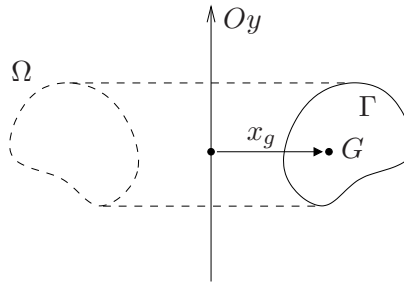


FIGURE 9.3.: Centre de gravité de la surface Γ .

Soit Ω le volume engendré par la rotation de la surface Γ autour de l'axe Oy . Γ ne coupe pas Oy . L'abscisse du centre de gravité de Γ est définie par :

$$x_g = \frac{V}{2\pi S} \quad (9.17)$$

S est la surface de Γ et V le volume de Ω .

9.2.3.2. Cas d'une ligne

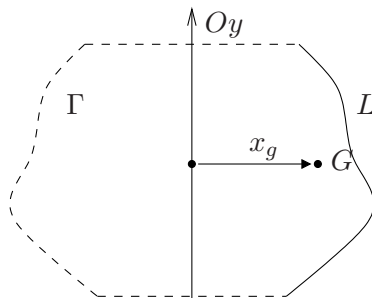


FIGURE 9.4.: Centre de gravité de la ligne L .

Soit Γ la surface engendrée par la rotation de la ligne L autour de l'axe Oy . L ne coupe pas Oy . L'abscisse du centre de gravité de L est définie par :

$$x_g = \frac{S}{2\pi l} \quad (9.18)$$

S est la surface de Γ et l la longueur de L .

9.3. Opérateurs d'inertie

9.3.1. Moment d'inertie

9.3.1.1. Généralités

L'unité du moment d'inertie est le $kg\,m^4$.

9.3.1.2. Moment d'inertie par rapport à un point

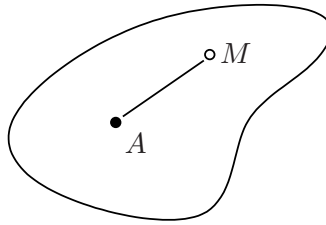


FIGURE 9.5.: Moment d'inertie par rapport à un point.

Le moment d'inertie du solide S par rapport à un point A est donné par :

$$I_A = \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM}^2 \, dm \quad (9.19)$$

9.3.1.3. Moment d'inertie par rapport à une droite

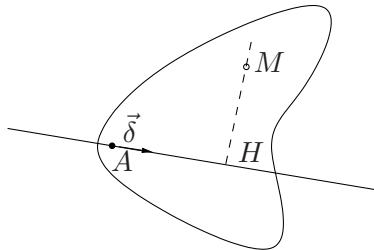


FIGURE 9.6.: Moment d'inertie par rapport à une droite.

Le moment d'inertie du solide S par rapport à une droite Δ passant par A et de vecteur directeur unitaire $\vec{\delta}$ est donné par :

$$I_{A\Delta} = \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\delta} \right)^2 \, dm = \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{HM}^2 \, dm \quad (9.20)$$

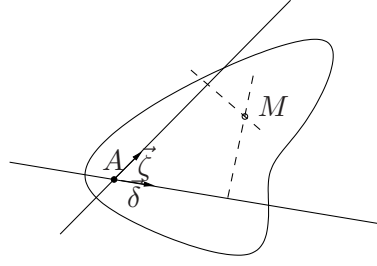


FIGURE 9.7.: Produit d'inertie par rapport à un plan.

9.3.1.4. Produit d'inertie par rapport à un plan

Le produit d'inertie du solide S par rapport à deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{\delta}$ et $\vec{\zeta}$ passant par A (définissant le plan π) est donné par :

$$I_{A\pi} = - \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{\delta} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{\zeta} \right) dm \quad (9.21)$$

9.3.1.5. Rayon de giration

Le rayon de giration est défini par R tel que :

$$R = \frac{I_{A\Delta}}{m} \quad (9.22)$$

9.3.1.6. Moment et produit d'inertie dans un repère donné

Nous considérons le repère orthonormé $R^\circ(O^\circ, \vec{e}_1^\circ, \vec{e}_2^\circ, \vec{e}_3^\circ)$. Nous allons exprimer les moments et les produits d'inertie d'un solide S par rapport aux éléments du repère R° .

Moment d'inertie par rapport à O° :

$$I_{O^\circ} = \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{O^\circ M}^2 dm = \int_{M \in \Omega} \left(x_1^{\circ 2} + x_2^{\circ 2} + x_3^{\circ 2} \right) dm \quad (9.23)$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $O^\circ x_1^\circ$:

$$A = I_{O^\circ x_1^\circ} = \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{O^\circ M} \wedge \vec{e}_1^\circ \right)^2 dm = \int_{M \in \Omega} \left(x_2^{\circ 2} + x_3^{\circ 2} \right) dm \quad (9.24)$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $O^\circ x_2^\circ$:

$$B = I_{O^\circ x_2^\circ} = \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{O^\circ M} \wedge \vec{e}_2^\circ \right)^2 dm = \int_{M \in \Omega} \left(x_1^{\circ 2} + x_3^{\circ 2} \right) dm \quad (9.25)$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe $O^\circ x_3^\circ$:

$$C = I_{O^\circ x_3^\circ} = \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{O^\circ M} \wedge \vec{e}_3^\circ \right)^2 dm = \int_{M \in \Omega} \left(x_1^{\circ 2} + x_2^{\circ 2} \right) dm \quad (9.26)$$

Produit d'inertie par rapport aux axes $O^\circ x_2^\circ, O^\circ x_3^\circ$:

$$D = -I_{O^\circ x_2^\circ x_3^\circ} = \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{O^\circ M} \cdot \vec{e}_2^\circ \right) \left(\overrightarrow{O^\circ M} \cdot \vec{e}_3^\circ \right) dm = \int_{M \in \Omega} x_2^\circ x_3^\circ dm \quad (9.27)$$

Produit d'inertie par rapport aux axes $O^\circ x_1^\circ, O^\circ x_3^\circ$:

$$E = -I_{O^\circ x_1^\circ x_3^\circ} = \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{O^\circ M} \cdot \vec{e}_1^\circ \right) \left(\overrightarrow{O^\circ M} \cdot \vec{e}_3^\circ \right) dm = \int_{M \in \Omega} (x_1^\circ x_3^\circ) dm \quad (9.28)$$

Produit d'inertie par rapport aux axes $O^\circ x_1^\circ$, $O^\circ x_2^\circ$:

$$F = -I_{O^\circ x_1^\circ x_2^\circ} = \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{O^\circ M} \cdot \vec{e}_1^\circ \right) \left(\overrightarrow{O^\circ M} \cdot \vec{e}_2^\circ \right) dm = \int_{M \in \Omega} (x_1^\circ x_2^\circ) dm \quad (9.29)$$

9.3.1.7. Relation entre les moments d'inerties

$$I_{O^\circ} = \frac{1}{2} (A + B + C) \quad (9.30)$$

9.3.2. Opérateur d'inertie en un point

9.3.2.1. Définition

On appelle opérateur d'inertie $\vec{J}_{O^\circ}(\vec{u})$ au point O° d'un solide S l'opérateur qui à tout vecteur \vec{u} associe le vecteur :

$$\vec{J}_{O^\circ}(\vec{u}) = \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{O^\circ M} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{O^\circ M} \right) \right) dm \quad (9.31)$$

9.3.2.2. Expression dans un repère

Nous considérons le repère orthonormé $R^\circ(O^\circ, \vec{e}_1^\circ, \vec{e}_2^\circ, \vec{e}_3^\circ)$. Nous allons exprimer l'opérateur d'inertie $\vec{J}_{O^\circ}(\vec{u})$ par rapport aux éléments du repère R° . Nous avons $\overrightarrow{O^\circ M} = x^\circ_\alpha \vec{e}_\alpha^\circ$ et $\vec{u} = u_\alpha \vec{e}_\alpha^\circ$. $\vec{J}_{O^\circ}(\vec{u})$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{J}_{O^\circ}(\vec{u}) = \mathbf{J}_{O^\circ \alpha \beta}^\circ u_\beta \vec{e}_\alpha^\circ \quad (9.32)$$

$\mathbf{J}_{O^\circ ij}^\circ$ s'appelle la matrice d'inertie :

$$\mathbf{J}_{O^\circ ij}^\circ = \int_{M \in \Omega} (x^\circ_\alpha x^\circ_\alpha \delta_{ij} - x^\circ_i x^\circ_j) dm \quad (9.33)$$

La matrice d'inertie s'exprime à partir des coefficients de Binet :

$$\mathbf{J}_{O^\circ ij}^\circ = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

Démonstration :

$$\vec{J}_{O^\circ}(\vec{u}) = \int_{M \in \Omega} \left(\overrightarrow{O^\circ M} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{O^\circ M} \right) \right) dm = \int_{M \in \Omega} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x^\circ_\beta \epsilon_{\gamma\zeta\xi} u_\zeta x^\circ_\xi \vec{e}^\circ_\alpha dm \quad (9.35)$$

$$= \int_{M \in \Omega} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\zeta\xi} u_\zeta x^\circ_\beta x^\circ_\xi \vec{e}^\circ_\alpha dm \quad (9.36)$$

$$= \int_{M \in \Omega} (\delta_{\alpha\zeta} \delta_{\beta\xi} - \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\zeta}) u_\zeta x^\circ_\beta x^\circ_\xi \vec{e}^\circ_\alpha dm \quad (9.37)$$

$$= \int_{M \in \Omega} (\delta_{\alpha\zeta} \delta_{\beta\xi} u_\zeta x^\circ_\beta x^\circ_\xi \vec{e}^\circ_\alpha - \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\zeta} u_\zeta x^\circ_\beta x^\circ_\xi \vec{e}^\circ_\alpha) dm \quad (9.38)$$

$$= \int_{M \in \Omega} (u_\alpha x^\circ_\xi x^\circ_\xi \vec{e}^\circ_\alpha - u_\beta x^\circ_\beta x^\circ_\alpha \vec{e}^\circ_\alpha) dm \quad (9.39)$$

$$= \int_{M \in \Omega} (x^\circ_\xi x^\circ_\xi \delta_{\alpha\beta} u_\beta \vec{e}^\circ_\alpha - x^\circ_\beta x^\circ_\alpha u_\beta \vec{e}^\circ_\alpha) dm \quad (9.40)$$

$$= \int_{M \in \Omega} (x^\circ_\xi x^\circ_\xi \delta_{\alpha\beta} - x^\circ_\beta x^\circ_\alpha) dm u_\beta \vec{e}^\circ_\alpha \quad (9.41)$$

$$= \mathbf{J}_{O^\circ \alpha\beta} u_\beta \vec{e}^\circ_\alpha \quad (9.42)$$

9.3.2.3. Nouvelle expression des moments et produits d'inertie

Les moments et les produits d'inertie peuvent s'exprimer à partir de la matrice d'inertie. On a :

- Le moment d'inertie du solide S par rapport à une droite Δ passant par O° et de vecteur directeur unitaire $\vec{\delta}$:

$$I_{O^\circ \Delta} = \vec{\delta} \cdot \mathbf{J}_{O^\circ} \cdot \vec{\delta} \quad (9.43)$$

$$= \delta_\alpha \mathbf{J}_{O^\circ \alpha\beta} \delta_\beta \quad (9.44)$$

- Le produit d'inertie du solide S par rapport à deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{\delta}$ et $\vec{\zeta}$ passant par O° (définissant le plan π) :

$$I_{O^\circ \pi} = \vec{\delta} \cdot \mathbf{J}_{O^\circ} \cdot \vec{\zeta} \quad (9.45)$$

$$= \delta_\alpha \mathbf{J}_{O^\circ \alpha\beta} \zeta_\beta \quad (9.46)$$

9.3.2.4. Axes principaux d'inertie

L'expression de la matrice d'inertie est fonction du repère dans lequel on l'exprime. Nous notons R° le repère général. Il existe un repère où cette matrice est diagonale. Nous notons R^\bullet ce repère. Nous pouvons écrire :

$$\mathbf{J}_{O^\circ ij} = \begin{bmatrix} A_{O^\circ} & -F_{O^\circ} & -E_{O^\circ} \\ -F_{O^\circ} & B_{O^\circ} & -D_{O^\circ} \\ -E_{O^\circ} & -D_{O^\circ} & C_{O^\circ} \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

et

$$\mathbf{J}_{O^\circ ij}^\bullet = \begin{bmatrix} A_{O^\circ}^\bullet & 0 & 0 \\ 0 & B_{O^\circ}^\bullet & 0 \\ 0 & 0 & C_{O^\circ}^\bullet \end{bmatrix} \quad (9.48)$$

$A_{O^\circ}^\bullet, B_{O^\circ}^\bullet, C_{O^\circ}^\bullet$, sont les valeurs propres de $\mathbf{J}_{O^\circ}^\bullet$. Les vecteurs propres de $\mathbf{J}_{O^\circ}^\bullet$ représentent les trois directions caractérisant R^\bullet .

Si la matrice d'inertie $\mathbf{J}_{O^\circ}^\bullet$ s'exprime au centre d'inertie G ($\mathbf{J}_{O^\circ}^\bullet \equiv \mathbf{J}_G^\bullet$), nous dirons que les axes de R^\bullet sont des axes centraux d'inertie.

9.3.3. Changement de repère et matrice d'inertie

9.3.3.1. Changement d'origine (Théorème de Huyghens)

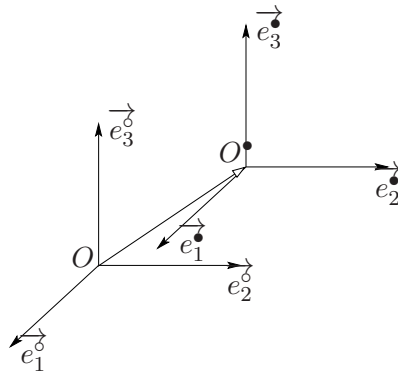


FIGURE 9.8.: Changement d'origine.

On considère deux repères R° et R^\bullet de même direction mais d'origines respectives O° et O^\bullet (voir figure 9.8). Nous avons $\overrightarrow{O^\circ O^\bullet} = a_\alpha \vec{e}_\alpha^\circ$ et par conséquent $x_i^\circ = a_i + x_i^\bullet$. Les matrices d'inertie s'écrivent dans les deux repères précédents. On a :

$$\mathbf{J}_{O^\circ ij}^\bullet = \begin{bmatrix} A_{O^\circ}^\bullet & -F_{O^\circ}^\bullet & -E_{O^\circ}^\bullet \\ -F_{O^\circ}^\bullet & B_{O^\circ}^\bullet & -D_{O^\circ}^\bullet \\ -E_{O^\circ}^\bullet & -D_{O^\circ}^\bullet & C_{O^\circ}^\bullet \end{bmatrix} \quad (9.49)$$

et

$$\mathbf{J}_{O^\bullet ij}^\bullet = \begin{bmatrix} A_{O^\bullet}^\bullet & -F_{O^\bullet}^\bullet & -E_{O^\bullet}^\bullet \\ -F_{O^\bullet}^\bullet & B_{O^\bullet}^\bullet & -D_{O^\bullet}^\bullet \\ -E_{O^\bullet}^\bullet & -D_{O^\bullet}^\bullet & C_{O^\bullet}^\bullet \end{bmatrix} \quad (9.50)$$

Il existe la relation suivante entre $\mathbf{J}_{O^\circ}^\bullet$ et $\mathbf{J}_{O^\bullet}^\bullet$:

$$\mathbf{J}_{O^\circ ij}^\bullet = \mathbf{J}_{O^\bullet ij}^\bullet + (a_\alpha a_\alpha \delta_{ij} - a_i a_j) m + \int_{M \in \Omega} (2a_\alpha x_i^\bullet \delta_{ij} - (a_i x_j^\bullet + x_i^\bullet a_j)) dm \quad (9.51)$$

Si O^\bullet est confondu avec le centre d'inertie du solide G , l'équation précédente devient :

$$\mathbf{J}_{O^\circ ij}^\bullet = \mathbf{J}_{Gij}^\bullet + (a_\alpha a_\alpha \delta_{ij} - a_i a_j) m \quad (9.52)$$

Que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$A_{O^\circ}^\circ = A_G^\circ + m(a_2^2 + a_3^2) \quad (9.53)$$

$$B_{O^\circ}^\circ = B_G^\circ + m(a_1^2 + a_3^2) \quad (9.54)$$

$$C_{O^\circ}^\circ = C_G^\circ + m(a_1^2 + a_2^2) \quad (9.55)$$

$$D_{O^\circ}^\circ = D_G^\circ + ma_2a_3 \quad (9.56)$$

$$E_{O^\circ}^\circ = E_G^\circ + ma_1a_3 \quad (9.57)$$

$$F_{O^\circ}^\circ = F_G^\circ + ma_1a_2 \quad (9.58)$$

Démonstration :

$$\mathbf{J}_{O^\circ ij}^\circ = \int_{M \in \Omega} (x_\alpha^\circ x_\alpha^\circ \delta_{ij} - x_i^\circ x_j^\circ) dm \quad (9.59)$$

$$= \int_{M \in \Omega} ((a_\alpha + x_\alpha^\bullet)(a_\alpha + x_\alpha^\bullet) \delta_{ij} - (a_i + x_i^\bullet)(a_j + x_j^\bullet)) dm \quad (9.60)$$

$$= \int_{M \in \Omega} ((a_\alpha a_\alpha + 2a_\alpha x_\alpha^\bullet + x_\alpha^\bullet x_\alpha^\bullet) \delta_{ij} - (a_i a_j + a_i x_j^\bullet + x_i^\bullet a_j + x_i^\bullet x_j^\bullet)) dm \quad (9.61)$$

$$= \int_{M \in \Omega} (x_\alpha^\bullet x_\alpha^\bullet \delta_{ij} - x_i^\bullet x_j^\bullet) dm \quad (9.62)$$

$$+ (a_\alpha a_\alpha \delta_{ij} - a_i a_j) \int_{M \in \Omega} dm \quad (9.63)$$

$$+ \int_{M \in \Omega} (2a_\alpha x_\alpha^\bullet \delta_{ij} - (a_i x_j^\bullet + x_i^\bullet a_j)) dm \quad (9.64)$$

$$= \mathbf{J}_{O^\bullet ij}^\circ + (a_\alpha a_\alpha \delta_{ij} - a_i a_j) m + \int_{M \in \Omega} (2a_\alpha x_\alpha^\bullet \delta_{ij} - (a_i x_j^\bullet + x_i^\bullet a_j)) dm \quad (9.65)$$

9.3.3.2. Changement de base

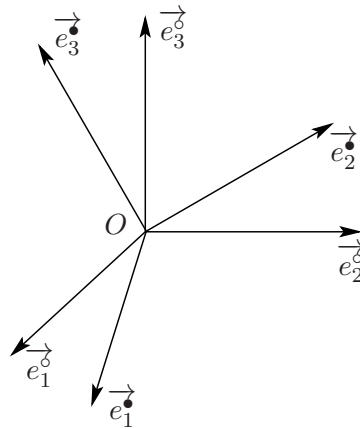


FIGURE 9.9.: Changement de base.

On considère deux repères R° et R^\bullet de même origine (voir figure 9.9). Le repère R^\bullet est obtenu à partir du repère R° par une rotation. La rotation est caractérisée par la matrice de rotation $\mathbf{R}^{\circ \rightarrow \bullet}$. On a :

$$x_i^\circ = \mathbf{R}^{\circ \rightarrow \bullet}_{i\alpha} x_\alpha^\bullet \quad (9.66)$$

La relation entre les moments d'inertie exprimés dans R° et R^\bullet est

$$\mathbf{J}_{O^\circ ij}^\bullet = (\mathbf{R}^{\circ \rightarrow \bullet})_{i\alpha}^T \mathbf{J}_{O^\circ \alpha\beta}^\circ \mathbf{R}^{\circ \rightarrow \bullet}_{\beta j} \quad (9.67)$$

9.3.4. Conditions de symétrie

9.3.4.1. Symétrie par rapport à un plan

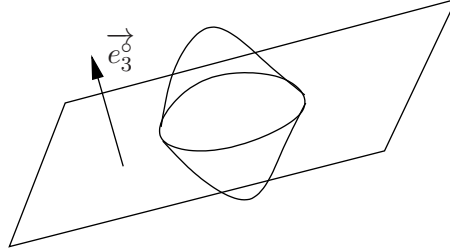


FIGURE 9.10.: Symétrie par rapport à un plan.

Supposons que le solide soit symétrique par rapport au plan $(O^\circ, \vec{e}_1^\circ, \vec{e}_2^\circ)$ (figure 9.10). Dans ce cas, nous avons :

$$\int_{M \in \Omega} (x_1^\circ x_3^\circ) dm = 0 \quad (9.68)$$

et

$$\int_{M \in \Omega} (x_2^\circ x_3^\circ) dm = 0 \quad (9.69)$$

d'où $E = 0$ et $D = 0$.

9.3.4.2. Symétrie par rapport à une droite

Supposons que le solide soit symétrique par rapport à la droite $(O^\circ, \vec{e}_3^\circ)$. Dans ce cas, le solide est symétrique par rapport aux plans $(O^\circ, \vec{e}_1^\circ, \vec{e}_3^\circ)$ et $(O^\circ, \vec{e}_2^\circ, \vec{e}_3^\circ)$. Par conséquent : $E = 0$, $F = 0$ et $D = 0$.

De plus, x_1° et x_2° jouent le même rôle donc : $A = B$.

10. Torseur cinétique et dynamique

10.1. Torseur cinétique

10.1.1. Définition

Le torseur cinétique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport au repère R^o est défini en un point A par :

$$T^{ci}_{E/R^o} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in \Omega} \vec{V}_{M \in E/R^o} dm \\ \int_{M \in \Omega} \vec{AM} \wedge \vec{V}_{M \in E/R^o} dm \end{array} \right. \quad (10.1)$$

- La résultante du torseur cinétique est appelée résultante cinétique.
- Le moment du torseur cinétique est appelé moment cinétique on le note également : $\vec{\sigma}_{AE/R^o}$.

10.1.2. Autre expression de la résultante cinétique

Soit G le centre d'inertie de E . La définition du vecteur \vec{OG} (voir 9.12) est :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_{M \in \Omega} \vec{OM} dm \quad (10.2)$$

La dérivée de cette équation par rapport au temps avec R^o fixé s'écrit :

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{OG} \right|_{R^o} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \int_{M \in \Omega} \vec{OM} dm \right) \right|_{R^o} \quad (10.3)$$

Le principe de conservation de la masse permet de transformer l'équation précédente. On a :

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{OG} \right|_{R^o} = \frac{1}{m} \int_{M \in \Omega} \left. \frac{d}{dt} \vec{OM} \right|_{R^o} dm \quad (10.4)$$

$$= \frac{1}{m} \int_{M \in \Omega} \vec{V}_{M \in E/R^o} dm \quad (10.5)$$

Comme $\left. \frac{d}{dt} \vec{OG} \right|_{R^o} = \vec{V}_{G \in E/R^o}$, la résultante de T^{ci}_{E/R^o} se réécrit :

$$\int_{M \in \Omega} \vec{V}_{M \in E/R^o} dm = m \vec{V}_{G \in E/R^o} \quad (10.6)$$

10.1.3. Autre expression du moment cinétique

Nous pouvons transformer l'expression de $\vec{\sigma}_{AE/R^o}$ de la manière suivante :

$$\vec{\sigma}_{AE/R^o} = \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M \in E/R^o} dm \quad (10.7)$$

$$= \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{V}_{A \in E/R^o} + \vec{\Omega}_{E/R^o} \wedge \overrightarrow{AM} \right) dm \quad (10.8)$$

$$= \left(\int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} dm \right) \wedge \vec{V}_{A \in E/R^o} + \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}_{E/R^o} \wedge \overrightarrow{AM} dm \quad (10.9)$$

On remarque que $\int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} dm = \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AO} dm + \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{OM} dm = m\overrightarrow{AO} + m\overrightarrow{OG}$ et, d'après l'expression du vecteur d'inertie, nous avons $\int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}_{E/R^o} \wedge \overrightarrow{AM} dm = \vec{J}_A(\vec{\Omega}_{E/R^o})$. Ce qui permet d'obtenir la relation :

$$\vec{\sigma}_{AE/R^o} = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A \in E/R^o} + \vec{J}_A(\vec{\Omega}_{E/R^o}) \quad (10.10)$$

10.1.4. Autre définition du torseur cinétique

Les résultats précédents permettent d'écrire le torseur cinétique sous la forme suivante :

$$T^{ci}_{E/R^o} = \left\{ \begin{array}{l} m\vec{V}_{G \in E/R^o} \\ m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A \in E/R^o} + \vec{J}_A(\vec{\Omega}_{E/R^o}) \end{array} \right. \quad (10.11)$$

10.2. Torseur dynamique

10.2.1. Définition

Le torseur dynamique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport au repère R^o est défini en un point A par :

$$T^{dy}_{E/R^o} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in \Omega} \vec{\Gamma}_{M \in E/R^o} dm \\ \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M \in E/R^o} dm \end{array} \right. \quad (10.12)$$

- La résultante du torseur cinétique est appelée résultante dynamique.
- Le moment du torseur cinétique est appelé moment dynamique, on le note également : $\vec{\delta}_{AE/R^o}$

10.2.2. Autre expression de la résultante dynamique

Nous avons établi en 10.1.3 que :

$$\int_{M \in \Omega} \vec{V}_{M \in E/R^o} dm = m\vec{V}_{G \in E/R^o} \quad (10.13)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps avec R^o fixé et en utilisant la conservation de la masse, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{M \in \Omega} \vec{V}_{M \in E/R^o} dm \right) \Big|_{R^o} = \frac{d}{dt} \left(m\vec{V}_{G \in E/R^o} \right) \Big|_{R^o} \quad (10.14)$$

$$\int_{M \in \Omega} \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_{M \in E/R^o} \right) \Big|_{R^o} dm = m\vec{\Gamma}_{G \in E/R^o} \quad (10.15)$$

Finalement nous avons la relation :

$$\int_{M \in \Omega} \vec{\Gamma}_{M \in E/R^o} dm = m \vec{\Gamma}_{G \in E/R^o} \quad (10.16)$$

10.2.3. Relation entre le moment dynamique et le moment cinétique

Le moment cinétique est défini par :

$$\vec{\sigma}_{AE/R^o} = \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M \in E/R^o} dm \quad (10.17)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps avec R^o fixé, nous obtenons :

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{AE/R^o} \right|_{R^o} = \int_{M \in \Omega} \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M \in E/R^o} \right|_{R^o} dm \quad (10.18)$$

$$= \int_{M \in \Omega} \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{AM} \right|_{R^o} \wedge \vec{V}_{M \in E/R^o} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M \in E/R^o} dm \quad (10.19)$$

$$= \int_{M \in \Omega} \left(\vec{V}_{M \in E/R^o} - \vec{V}_{A \in E/R^o} \right) \wedge \vec{V}_{M \in E/R^o} dm \quad (10.20)$$

$$+ \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M \in E/R^o} dm \quad (10.21)$$

$$= - \int_{M \in \Omega} \vec{V}_{A \in E/R^o} \wedge \vec{V}_{M \in E/R^o} dm + \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}_{M \in E/R^o} dm \quad (10.22)$$

$$= - \vec{V}_{A \in E/R^o} \wedge m \vec{V}_{G \in E/R^o} + \vec{\sigma}_{AE/R^o} \quad (10.23)$$

d'où la relation :

$$\vec{\delta}_{AE/R^o} = m \left(\vec{V}_{A \in E/R^o} \wedge \vec{V}_{G \in E/R^o} \right) + \left. \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{AE/R^o} \right|_{R^o} \quad (10.24)$$

10.3. Énergie cinétique d'un solide

10.3.1. Définition

L'énergie cinétique d'un solide S de masse m , de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à R^o est :

$$E^c_{S/R^o} = \frac{1}{2} \int_{M \in \Omega} \vec{V}_{M \in E/R^o} \cdot \vec{V}_{M \in E/R^o} dm \quad (10.25)$$

On démontre que l'énergie cinétique s'exprime également par :

$$E^c_{S/R^o} = \frac{1}{2} T^{ci}_{S/R^o} \otimes T_{c_{S/R^o}} \quad (10.26)$$

Quatrième partie .

Énoncés fondamentaux

11. Principe fondamental de la statique (PFS)

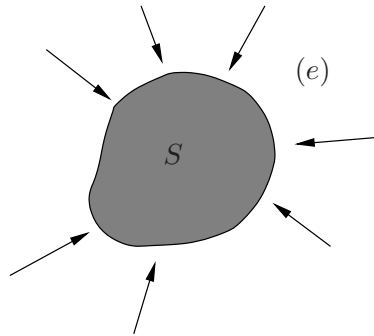


FIGURE 11.1.: PFS.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un solide S soit en équilibre est que le torseur statique associé aux actions extérieures e appliquées au solide soit nul.

$$T_s^{e \rightarrow S} = 0 \quad (11.1)$$

12. Principe fondamental de la dynamique (PFD)

12.1. Énoncé

Il existe au moins un repère R_g , appelé repère galiléen, et au moins une chronologie, appelée chronologie galiléenne, tels que à tout instant, le torseur des actions extérieures (e) appliquées au système matériel E est égal au torseur dynamique de E dans son mouvement par rapport à R_g .

Nous avons donc l'égalité :

$$T_s^{e \rightarrow E} = T^{dy}_{E/R_g} \quad (12.1)$$

12.2. Repère galiléen et chronologie galiléenne

Un repère galiléen exact n'existe pas, car tout dans la nature est en mouvement. Le choix d'un repère galiléen approché doit se faire en fonction du phénomène étudié. Nous distinguons trois repères galiléens approchés :

Le repère de Copernic : Il a pour centre le centre d'inertie du système solaire, plus trois directions stellaires fixes. Il est utilisé pour représenter les mouvements interplanétaires.

Le repère lié au centre d'inertie de la terre : Il a pour centre, le centre d'inertie de la terre, plus trois directions stellaires fixes. Il est utilisé pour étudier le mouvement :

- d'un objet au voisinage de la terre,
- d'un objet sur une longue période (pendule de Foucault),
- d'un objet très rapide (gyroscope).

Le repère lié au laboratoire : Il est utilisé dans tous les mouvements classiques.

La chronologie galiléenne sera mesurée par une montre classique.

En mécanique classique, l'espace (le repère galiléen) et le temps (la chronologie galiléenne) ne sont pas liés. En mécanique relativiste (étude des objets se déplaçant à une vitesse proche de la vitesse de la lumière), l'espace et le temps sont liés.

12.3. Équations du mouvement

La position du système matériel E par rapport à R_g dépend de n paramètres $q_i(t)$. Le PFD s'exprime sous la forme d'une équation torsorielle (équation 12.1). Celle-ci se compose de deux équations vectorielles qui permettent d'écrire au maximum 6 équations algébriques. Ces équations algébriques font intervenir les positions q_i , les vitesses \dot{q}_i , et les accélérations \ddot{q}_i de E . Chaque équation algébrique est une équation différentielle du deuxième degré $f_i(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n)$. L'ensemble de ces équations sont les équations du mouvement.

Le PFD permet donc d'écrire un système de p équations différentielles généralement non linéaires, avec $p \leq 6$:

12. Principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 \left(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n \right) \\ \vdots \\ f_p \left(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n \right) \end{array} \right. \quad (12.2)$$

La résolution de ce système peut se faire rarement "à la main", elle nécessite l'emploi de méthodes numériques.

13. Principe des actions mutuelles

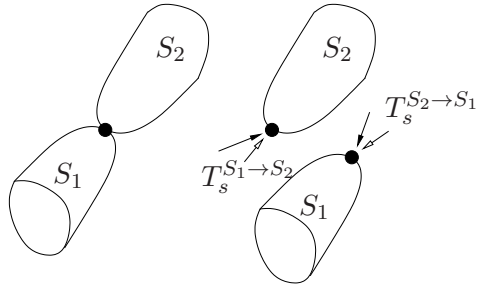


FIGURE 13.1.: Principe des actions mutuelles.

Si l'on considère deux solides S_1 et S_2 , le torseur des actions de S_1 sur S_2 est opposé au torseur des actions de S_2 sur S_1 .

$$T_s^{S_1 \rightarrow S_2} = -T_s^{S_2 \rightarrow S_1} \quad (13.1)$$

14. Approche énergétique

14.1. Puissance

14.1.1. Puissance des efforts extérieurs

14.1.1.1. Définition de la puissance dans le cas général

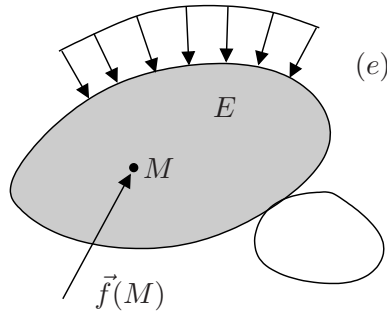


FIGURE 14.1.: Efforts extérieurs.

Soit un ensemble matériel E en mouvement par rapport au repère R^o . Le milieu extérieur (e) exerce sur E une densité de force $\vec{f}(M)$ relative à la mesure dm en chaque point M de E .

La puissance développée, à un instant t , par l'action mécanique de (e) sur E dans son mouvement par rapport à R^o est :

$$P_{e \rightarrow E/R^o} = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}_{M \in E/R^o} dm \quad (14.1)$$

14.1.1.2. Définition de la puissance dans le cas d'un solide indéformable

Soit un solide indéformable S en mouvement par rapport au repère R^o caractérisé par le torseur cinématique T_{cS/R^o} . Le milieu extérieur (e) exerce sur S effort extérieur caractérisé par le torseur statique $T_s^{e \rightarrow S}$.

La puissance développée, à un instant t , par l'action mécanique de (e) sur S dans son mouvement par rapport à R^o est :

$$P_{e \rightarrow S/R^o} = T_{cS/R^o} \otimes T_s^{e \rightarrow S} \quad (14.2)$$

14.1.2. Puissance entre deux ensembles matériels

14.1.2.1. Définition générale

La puissance développée, à la date t , par les actions mutuelles entre les ensembles matériels $E^{(1)}$ et $E^{(2)}$, dans leur mouvement par rapport à R^o , est :

$$P_{E^{(1)} \leftrightarrow E^{(2)} / R^o} = P_{E^{(1)} \rightarrow E^{(2)} / R^o} + P_{E^{(2)} \rightarrow E^{(1)} / R^o} \quad (14.3)$$

La puissance développée par les actions mutuelles de $E^{(1)}$ sur $E^{(2)}$ est indépendante du repère R^o . Par conséquent on notera cette puissance :

$$P_{E^{(1)} \leftrightarrow E^{(2)}} \quad (14.4)$$

14.2. Travail

14.2.1. Définition

Le travail, entre les dates t_1 et t_2 , de l'action mécanique de l'ensemble matériel $E^{(1)}$ sur l'ensemble matériel $E^{(2)}$, dans le mouvement de e par rapport à R^o , est :

$$W_{t_1 E^{(1)} \rightarrow E^{(2)} / R^o}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P_{E^{(1)} \rightarrow E^{(2)} / R^o} dt \quad (14.5)$$

14.3. Énergie potentielle

14.3.1. Définition

L'ensemble matériel E possède une énergie potentielle, associée à l'action mécanique de e sur E , dans le mouvement de E par rapport à R^o , s'il existe une fonction scalaire $\Psi_{e \rightarrow E / R^o}^p$ telle que :

$$P_{e \rightarrow E / R^o} = -\frac{d}{dt} \Psi_{e \rightarrow E / R^o}^p \quad (14.6)$$

14.3.2. Définition dans le cas d'actions mutuelles

Les deux ensembles matériels $E^{(1)}$ et $E^{(2)}$ possèdent une énergie potentielle, associée à une action mutuelle, s'il existe une fonction scalaire $\Psi_{E^{(1)} \leftrightarrow E^{(2)}}^p$ telle que :

$$P_{E^{(1)} \leftrightarrow E^{(2)}} = -\frac{d}{dt} \Psi_{E^{(1)} \leftrightarrow E^{(2)}}^p \quad (14.7)$$

14.4. Théorèmes de l'énergie cinétique

14.4.1. Cas d'un seul solide

La dérivée, par rapport à la date t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide S est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures (e) à S .

$$\frac{d}{dt} E_{S/R_g}^c = P_{e \rightarrow S/R_g} \quad (14.8)$$

14.4.2. Cas d'un ensemble de solides

La dérivée, par rapport à la date t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble de solides E est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures (e) à E et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide.

$$\frac{d}{dt}E^c_{E/R_g} = P_{e \rightarrow E/R_g} + \sum_i \sum_j P_{Si \leftrightarrow Sj} \quad \text{avec } i < j \quad (14.9)$$

Cinquième partie .

Liaisons, Mécanismes

15. Liaisons mécaniques

15.1. Notion de degrés de liberté.

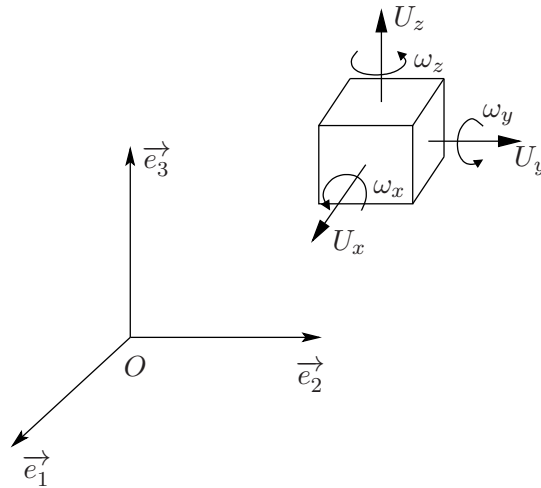


FIGURE 15.1.: Mouvements possibles d'un solide en 3D.

On considère un solide libre de mouvement. Le mouvement de ce solide est caractérisé, en 3D, par 6 mouvements élémentaires (voir figure 15.1). Ces mouvements élémentaires sont les degrés de liberté (d.d.l.) du solide.

Les d.d.l. sont de deux types :

- les d.d.l. de translation :
 - translation suivant \vec{e}_1 : U_x ,
 - translation suivant \vec{e}_2 : U_y ,
 - translation suivant \vec{e}_3 : U_z ,
- les d.d.l. de rotation :
 - rotation autour de \vec{e}_1 : ω_x ,
 - rotation autour de \vec{e}_2 : ω_y ,
 - rotation autour de \vec{e}_3 : ω_z .

On définit, à partir des d.d.l., deux vecteurs :

- le vecteur des d.d.l. de translation : $\vec{T} = U_x \vec{e}_1 + U_y \vec{e}_2 + U_z \vec{e}_3$,
- le vecteur des d.d.l. de rotation : $\vec{R} = \omega_x \vec{e}_1 + \omega_y \vec{e}_2 + \omega_z \vec{e}_3$.

y

Dans le cas où l'on étudie un mouvement en 2D, il n'existe que 3 d.d.l. qui sont : U_x, U_y, ω_z . On écrira donc :

$$\vec{T} = U_x \vec{e}_1 + U_y \vec{e}_2 \quad (15.1)$$

$$\vec{R} = \omega_z \vec{e}_3 \quad (15.2)$$

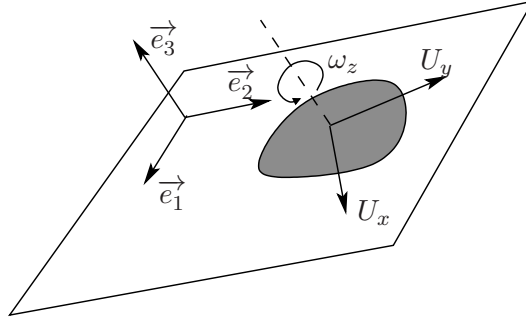


FIGURE 15.2.: Mouvements possibles d'un solide en 2D.

15.2. Torseur cinématique d'une liaison mécanique.

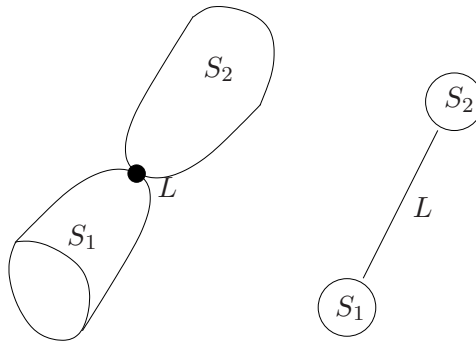


FIGURE 15.3.: Liaisons mécaniques.

On considère une liaison mécanique L reliant le solide S^a au solide S^b . Cette liaison mécanique autorise ou supprime certains mouvements. Dans le cas où le mouvement est possible, celui-ci sera un degré de liberté. Dans le cas où le mouvement est impossible, celui-ci sera un degré de liaison.

Si l'on note N_c le nombre de degré de liberté d'une liaison et N_s le nombre degré de liaison on aura $N_c + N_s = 6$ en 3D, et $N_c + N_s = 3$ en 2D.

Le torseur cinématique de la liaison mécanique L regroupe les vitesses et les vitesses de rotations correspondant aux degrés de liberté. Si tous les mouvements sont possibles, le torseur cinématique de la liaison dans son mouvement de S^b par rapport à S^a s'exprime par :

$$T_{c_{S^b/S^a}} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{S^b/S^a} = \Omega_x \vec{e}_1 + \Omega_y \vec{e}_2 + \Omega_z \vec{e}_3 \\ \vec{V}_{A \in S^b/S^a} = V_x \vec{e}_1 + V_y \vec{e}_2 + V_z \vec{e}_3 \end{cases} \quad (15.3)$$

Les composantes du torseur cinématique s'appellent les inconnues cinématiques. Dans une liaison nous avons N_c inconnues cinématiques.

15.3. Effort transmissible par une liaison mécanique

Un effort sera transmissible par une liaison s'il existe des déplacements impossibles dans la liaison. Ces déplacements impossibles sont les degrés de liaison. Pour chacun d'eux, nous aurons un effort transmissible.

Nous avons vu qu'il existait six degrés de liaisons possibles. Nous aurons donc six efforts possibles. Les degrés de liaison en translation entraîneront des forces et les degrés de liaison en rotation entraîneront

des moments. Le tableau ci-dessous indique les différents efforts et leur correspondance avec les degrés de liaison.

Axe	Inconnue Cinématique	Effort transmissible
\vec{e}_1	Ω_x	L
\vec{e}_2	Ω_y	M
\vec{e}_3	Ω_z	N
\vec{e}_1	V_x	X
\vec{e}_2	V_y	Y
\vec{e}_3	V_z	Z

TABLE 15.1.: Efforts transmissibles par une liaison.

Le torseur statique associé à une liaison mécanique qui transmet un effort du solide (S^a) sur un solide (S^b) sera défini à partir des efforts transmissibles par cette liaison. Dans le cas général, on aura pour une liaison définie en A :

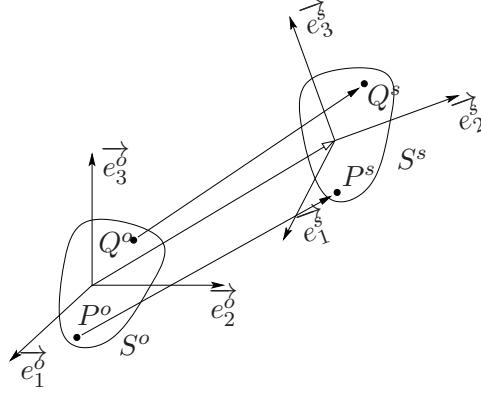
$$T_s^{S^a \rightarrow S^b} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3 \\ L\vec{e}_1 + M\vec{e}_2 + N\vec{e}_3 \end{array} \right.} \quad (15.4)$$

Les composantes du torseur statique s'appellent les inconnues statiques. Dans une liaisons nous avons N_s inconnues statiques.

15.4. Liaisons mécaniques élémentaires normalisées.

15.5. Torseur des petits déplacements

15.5.1. Position du problème

FIGURE 15.4.: Transformation de (S^o) en (S^s) .

Soit un point P^o appartenant au solide (S^o) . Soit R^o le repère attaché à (S^o) . le vecteur $\overrightarrow{O^o P^o}$ permettant de repérer le point P^o dans le repère R^o . On applique à (S^o) une translation puis une rotation. La translation est caractérisée par le vecteur $\overrightarrow{O^o O^s}$. La rotation est caractérisée par la matrice $\mathbf{R}^{s \leftarrow o}$. L'image du solide (S^o) par cette transformation est le solide (S^s) . L'image du repère R^o par cette transformation est le repère R^s . L'image du point P^o par cette transformation est le point P^s .

On considère un autre point Q^o appartenant au solide (S^o) , qui par la transformation précédente devient Q^s . La question que l'on se pose est de définir la relation qui existe entre les composantes du vecteur $\overrightarrow{P^o P^s}$ et du vecteur $\overrightarrow{Q^o Q^s}$ exprimée dans la même base.

Le vecteur $\overrightarrow{P^o P^s}$ est appelé le vecteur déplacement du point P dans la transformation de S^o en S^s . On notera $\overrightarrow{P^o P^s} = \vec{\delta}_{P \in S^s / S^o}$.

15.5.2. Relation entre les composantes des vecteurs déplacements.

Le solide est indéformable, par conséquent, les coordonnées du point P^o dans le repère R^o sont identiques aux coordonnées du point P^s dans le repère R^s . On écrit :

$$\overrightarrow{O^o P^o} = x_{\alpha}^{(p)} \vec{e}_{\alpha}^o \quad (15.5)$$

$$\overrightarrow{O^s P^s} = x_{\alpha}^{(p)} \vec{e}_{\alpha}^s \quad (15.6)$$

A partir des résultats donnés en [3] paragraphe ??, nous allons exprimer \vec{e}_{α}^o en fonction de \vec{e}_{α}^s .

Nous avons $\overrightarrow{O^o P^o} = x_{\alpha}^o \vec{e}_{\alpha}^o = x_{\alpha}^s \vec{e}_{\alpha}^s$ et $x_i^o = \mathbf{R}_{i\alpha}^{o \leftarrow s} x_{\alpha}^s$. Nous pouvons écrire :

$$x_{\alpha}^s \vec{e}_{\alpha}^s = x_{\beta}^o \vec{e}_{\beta}^o \quad (15.7)$$

$$= \mathbf{R}_{\beta\alpha}^{o \leftarrow s} x_{\alpha}^s \vec{e}_{\beta}^o \quad (15.8)$$

$$= x_{\alpha}^s \mathbf{R}_{\beta\alpha}^{o \leftarrow s} \vec{e}_{\beta}^o \quad (15.9)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\vec{e}_i^s = \mathbf{R}_{\beta i}^{o \leftarrow s} \vec{e}_\beta^o \quad (15.10)$$

$$= \mathbf{R}_{i\beta}^{s \leftarrow o} \vec{e}_\beta^o \quad (15.11)$$

En utilisant les relations précédentes, $\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o}$ se réécrit :

$$\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o} = \overrightarrow{P^o P^s} = \overrightarrow{P^o O^o} + \overrightarrow{O^o O^s} + \overrightarrow{O^s P^s} \quad (15.12)$$

$$= \overrightarrow{O^o O^s} + \overrightarrow{O^s P^s} - \overrightarrow{O^o P^o} \quad (15.13)$$

$$= \overrightarrow{O^o O^s} + x_\alpha^{(p)} \vec{e}_\alpha^s - x_\alpha^{(p)} \vec{e}_\alpha^o \quad (15.14)$$

$$= \overrightarrow{O^o O^s} + x_\alpha^{(p)} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{s \leftarrow o} \vec{e}_\beta^o - x_\alpha^{(p)} \vec{e}_\alpha^o \quad (15.15)$$

$$= \overrightarrow{O^o O^s} + x_\alpha^{(p)} (\mathbf{R}_{\alpha\beta}^{s \leftarrow o} - \delta_{\alpha\beta}) \vec{e}_\beta^o \quad (15.16)$$

$$= \overrightarrow{O^o O^s} + (\mathbf{R}_{\beta\alpha}^{o \leftarrow s} - \delta_{\alpha\beta}) x_\alpha^{(p)} \vec{e}_\beta^o \quad (15.17)$$

Nous pouvons maintenant établir une relation entre $\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o}$ et $\vec{\delta}_{Q \in S^s/S^o}$:

$$\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o} = \overrightarrow{O^o O^s} + (\mathbf{R}_{\beta\alpha}^{o \leftarrow s} - \delta_{\alpha\beta}) x_\alpha^{(p)} \vec{e}_\beta^o \quad (15.18)$$

$$\vec{\delta}_{Q \in S^s/S^o} = \overrightarrow{O^o O^s} + (\mathbf{R}_{\beta\alpha}^{o \leftarrow s} - \delta_{\alpha\beta}) x_\alpha^{(q)} \vec{e}_\beta^o \quad (15.19)$$

$$\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o} - \vec{\delta}_{Q \in S^s/S^o} = (\mathbf{R}_{\beta\alpha}^{o \leftarrow s} - \delta_{\alpha\beta}) x_\alpha^{(p)} \vec{e}_\beta^o - (\mathbf{R}_{\beta\alpha}^{o \leftarrow s} - \delta_{\alpha\beta}) x_\alpha^{(q)} \vec{e}_\beta^o \quad (15.20)$$

$$= (\mathbf{R}_{\beta\alpha}^{o \leftarrow s} - \delta_{\alpha\beta}) (x_\alpha^{(p)} - x_\alpha^{(q)}) \vec{e}_\beta^o \quad (15.21)$$

Nous allons donner une expression plus simple de $\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o} - \vec{\delta}_{Q \in S^s/S^o}$. Nous avons, en considérant que la matrice de rotation est définie à partir des angles généraux (voir [3] paragraphe ??) :

$$\mathbf{R}_{ij}^{o \leftarrow s} - \delta_{ij} = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} c_{\theta_3} - 1 & -s_{\theta_3} c_{\theta_2} & s_{\theta_2} \\ s_{\theta_3} c_{\theta_1} + s_{\theta_1} s_{\theta_2} c_{\theta_3} & c_{\theta_3} c_{\theta_1} - s_{\theta_1} s_{\theta_2} s_{\theta_3} - 1 & -s_{\theta_1} c_{\theta_2} \\ s_{\theta_1} s_{\theta_3} - s_{\theta_2} c_{\theta_1} c_{\theta_3} & s_{\theta_1} c_{\theta_3} + c_{\theta_1} s_{\theta_2} s_{\theta_3} & c_{\theta_1} c_{\theta_2} - 1 \end{bmatrix} \quad (15.22)$$

avec : $c_{\theta_i} = \cos(\theta_i)$ et $s_{\theta_i} = \sin(\theta_i)$.

Si l'on considère que les angles de rotation sont petits ($c_{\theta_i} = 1$ et $s_{\theta_i} = \theta_i$), la matrice de rotation se réécrit :

$$\mathbf{R}_{ij}^{o \leftarrow s} - \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.23)$$

Dans ce cas $\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o} - \vec{\delta}_{Q \in S^s/S^o}$ devient :

$$\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o} - \vec{\delta}_{Q \in S^s/S^o} = (\mathbf{R}_{\beta\alpha}^{o \leftarrow s} - \delta_{\alpha\beta}) (x_\alpha^{(p)} - x_\alpha^{(q)}) \vec{e}_\beta \quad (15.24)$$

$$= \left(-\theta_3 (x_2^{(p)} - x_2^{(q)}) + \theta_2 (x_3^{(p)} - x_3^{(q)}) \right) \vec{e}_1 \quad (15.25)$$

$$= \left(\theta_3 (x_1^{(p)} - x_1^{(q)}) - \theta_1 (x_3^{(p)} - x_3^{(q)}) \right) \vec{e}_2 \quad (15.26)$$

$$= \left(-\theta_2 (x_1^{(p)} - x_1^{(q)}) + \theta_1 (x_2^{(p)} - x_2^{(q)}) \right) \vec{e}_3 \quad (15.27)$$

En posant $\vec{\theta}_{B^s/B^o} = \theta_1 \vec{e}_1 + \theta_2 \vec{e}_2 + \theta_3 \vec{e}_3 = \theta_\alpha \vec{e}_\alpha$ et $\overrightarrow{P^o Q^o} = (x_\alpha^{(q)} - x_\alpha^{(p)}) \vec{e}_\alpha$ il est facile de montrer que :

$$\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o} = \vec{\delta}_{Q \in S^s/S^o} + \overrightarrow{P^o Q^o} \wedge \vec{\theta}_{B^s/B^o} \quad (15.28)$$

15.5.3. Définition du torseur des petits déplacements

L'expression (15.28) est du type moment. Le moment étant le déplacement $\vec{\delta}_{P \in S^s/S^o}$ et la résultante $\vec{\theta}_{B^s/B^o}$. Nous pouvons donc définir le torseur des petits déplacements par :

$$T_{\delta_{B^s/B^o}} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\theta}_{B^s/B^o} \\ \vec{\delta}_{P \in S^s/S^o} \end{array} \right. \quad (15.29)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\theta}_{B^s/B^o} \\ \vec{\delta}_{Q \in S^s/S^o} = \vec{\delta}_{P \in S^s/S^o} + \overrightarrow{Q^o P^o} \wedge \vec{\theta}_{B^s/B^o} \end{array} \right. \quad (15.30)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\theta}_{B^s/B^o} \\ \overrightarrow{Q^o Q^s} = \overrightarrow{P^o P^s} + \overrightarrow{Q^o P^o} \wedge \vec{\theta}_{B^s/B^o} \end{array} \right. \quad (15.31)$$

16. Étude des mécanismes

16.1. Liaisons en parallèle

16.1.1. Définition

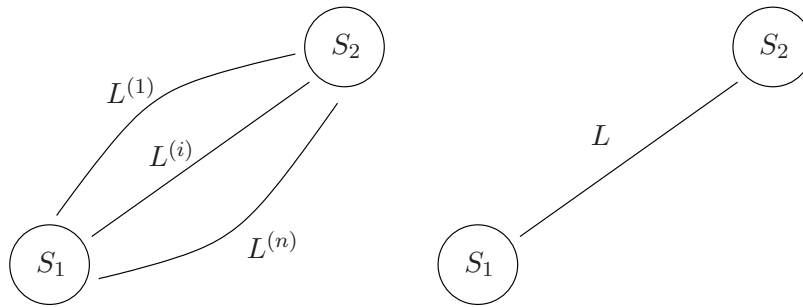


FIGURE 16.1.: Liaisons en parallèle.

Nous supposons n liaisons élémentaires $L^{(i)}$ en parallèle entre deux solides S_1 et S_2 . On définit par L la liaison équivalente entre les solides S_1 et S_2 (voir figure 16.1).

16.1.2. Étude statique de la liaison équivalente

Nous allons réaliser l'équilibre du solide S_1 . Ce solide est soumis aux actions extérieures, représentées par le torseur $T_s^{e \rightarrow S_1}$, ainsi qu'aux actions des liaisons $L^{(i)}$, représentées par les torseurs $T_s^{L^{(i)} \rightarrow S_1}$. L'équilibre s'écrit :

$$T_s^{e \rightarrow S_1} + \sum_{i=1}^n T_s^{L^{(i)} \rightarrow S_1} = 0 \quad (16.1)$$

avec, dans le cas général :

$$T_s^{L^{(i)} \rightarrow S_1} = \begin{Bmatrix} X^{(i)} \vec{e}_1 + Y^{(i)} \vec{e}_2^\circ + Z^{(i)} \vec{e}_3^\circ \\ L^{(i)} \vec{e}_1 + M^{(i)} \vec{e}_2^\circ + N^{(i)} \vec{e}_3^\circ \end{Bmatrix}_A \quad (16.2)$$

on définit le vecteur $D_s^{(i)}$ des composantes non nulles du torseur $T_s^{L^{(i)} \rightarrow S_1}$. Dans le cas général on a :

$$D_s^{(i)} = \begin{bmatrix} X^{(i)} & Y^{(i)} & Z^{(i)} & L^{(i)} & M^{(i)} & N^{(i)} \end{bmatrix}^T \quad (16.3)$$

Si l'on note $T_s^{L \rightarrow S_1}$ le torseur des actions de la liaison équivalente sur le solide S_1 , l'équilibre se réécrit :

$$T_s^{e \rightarrow S_1} + T_s^{L \rightarrow S_1} = 0 \quad (16.4)$$

avec, dans le cas général :

$$T_s^{L \rightarrow S_1} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3 \\ L\vec{e}_1 + M\vec{e}_2 + N\vec{e}_3 \end{array} \right\}} \quad (16.5)$$

Si l'on note Ns_i le nombre d'inconnues statiques de chaque liaison, le nombre d'inconnues statiques sera :

$$Ns = \sum_{i=1}^n Ns_i \quad (16.6)$$

Les équations 16.1 et 16.4 permettent d'écrire :

$$T_s^{L \rightarrow S_1} = \sum_{i=1}^n T_s^{L^{(i)} \rightarrow S_1} \quad (16.7)$$

Dans le cas général, l'équation donne 6 équations algébriques dans lesquelles sont présentes les Ns inconnues statiques provenant des liaisons $L^{(i)}$, et les 6 inconnues statiques provenant de la liaison équivalente L . L'écriture matricielle de ce système d'équations donne :

$$6 \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & \vdots \\ \cdots & S_{ij} & \cdots \\ & \vdots & S_{6n} \end{bmatrix}}^{Ns} \right\} = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ D_{s_i}^{(1)} \\ \vdots \end{array} \right] \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{c} \vdots \\ D_{s_i}^{(n)} \\ \vdots \end{array} \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} X \\ \vdots \\ N \end{array} \right] \quad (16.8)$$

On note r_s le rang de la matrice S . la valeur de r_s permet de qualifier la liaison :

- si $r_s = 6$: la liaison équivalente est complète (les 6 degrés de liaison sont présents),
- si $r_s < 6$: la liaison équivalente est partielle.

De plus :

- si $Ns = r_s$ la liaison est isostatique,
- si $Ns > r_s$ la liaison est hyperstatique.

On définit le degré d'hyperstatisme par :

$$h = Ns - r_s \quad (16.9)$$

16.1.3. Étude cinématique de la liaison équivalente

La compatibilité cinématique des n liaisons en parallèle $L^{(i)}$ avec la liaison équivalente L s'exprime par l'identité des torseurs cinématiques de chaque liaison $L^{(i)}$ avec la liaison équivalente L . On écrit :

$$T_{c_{L^{(i)}}/R^o} = T_{c_L/R^o} \quad (16.10)$$

avec $T_{c_{L^{(i)}}/R^o}$ le torseur cinématique caractéristique de la liaison $L^{(i)}$. Dans sa forme générale, $T_{c_{L^{(i)}}/R^o}$ s'exprime par :

$$T_{c_{L(i)/R^o}} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \Omega_x^{(i)} \vec{e}_1 + \Omega_y^{(i)} \vec{e}_2^\circ + \Omega_z^{(i)} \vec{e}_3^\circ \\ V_x^{(i)} \vec{e}_1 + V_y^{(i)} \vec{e}_2^\circ + V_z^{(i)} \vec{e}_3^\circ \end{array} \right.} \quad (16.11)$$

On définit le vecteur $D_c^{(i)}$ par les composantes non nulles du torseur $T_{c_{L(i)/R^o}}$. Dans le cas général on a :

$$D_c^{(i)} = \left[\begin{array}{cccccc} \Omega_x^{(i)} & \Omega_y^{(i)} & \Omega_z^{(i)} & V_x^{(i)} & V_y^{(i)} & V_z^{(i)} \end{array} \right]^T \quad (16.12)$$

et $T_{c_{L/R^o}}$ le torseur cinématique caractéristique de la liaison L . Dans sa forme générale, $T_{c_{L/R^o}}$ s'exprime par :

$$T_{c_{L/R^o}} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \Omega_x \vec{e}_1 + \Omega_y \vec{e}_2^\circ + \Omega_z \vec{e}_3^\circ \\ V_x \vec{e}_1 + V_y \vec{e}_2^\circ + V_z \vec{e}_3^\circ \end{array} \right.} \quad (16.13)$$

On définit le vecteur D_c des composantes non nulles du torseur $T_{c_{L(i)/R^o}}$. Dans le cas général, on a :

$$D_c = \left[\begin{array}{cccccc} \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z & V_x & V_y & V_z \end{array} \right]^T \quad (16.14)$$

La compatibilité cinématique, exprimée par la relation 16.10, conduit à n systèmes d'équations à 6 équations. Nous allons donc avoir un système à $6n$ équations.

Nous allons distinguer dans ce système deux types d'équations. Les équations principales et non principales. Les équations non-principales sont du type :

$$D_{c_i}^{(i)} = D_{c_i} \quad (16.15)$$

Il y a Nc équations de ce type. Les équations principales ont la forme :

$$f(D_{c_1}, \dots, D_{c_n}) = 0 \quad (16.16)$$

où f est une fonction. Il y a $6n - Nc$ fonction de ce type.

Les équations non principales ne présentent pas d'intérêt particulier. Par contre les équations principales permettent d'écrire le système suivant :

$$6n - Nc \left\{ \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \dots & C_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ D_{s_i}^* \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \right. \quad (16.17)$$

D_s^* est constitué d'éléments de D_c . La taille de D_s^* est à priori inconnue.

Nous noterons r_c le rang de la matrice C . la valeur de r_c permet de qualifier la liaison :

- si $6n - Nc = r_c$, la liaison est non surabondante
- si $6n - Nc > r_c$, la liaison est surabondante de degré $h_c = 6n - Nc - r_c$.

De plus :

- si $r_c = 6$, la liaison est rigide
- si $r_c < 6$, la liaison est mobile de degré $m = 6 - r_c$

16.2. Liaisons en série

16.2.1. Mécanisme à chaîne ouverte

16.2.1.1. Définition

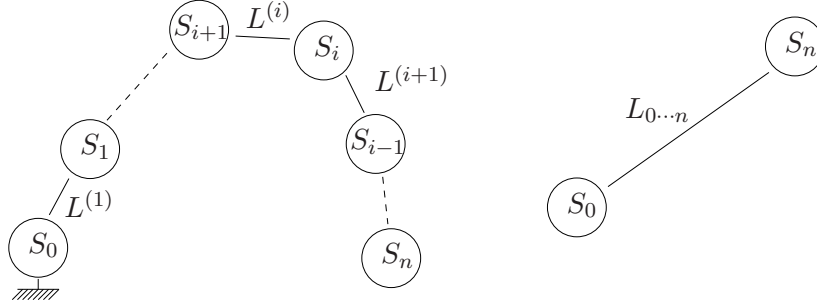


FIGURE 16.2.: Chaîne ouverte.

Nous considérons $n + 1$ solides reliés entre eux par n liaisons. Nous avons entre les deux solides S_{i-1} et S_i une seule liaison, notée $L^{(i)}$. le premier solide S_0 est relié au bâti. Le dernier solide S_n est libre. Cet ensemble (voir figure 16.3) constitue une chaîne continue ouverte.

La liaison équivalente à ces liaisons en série sera notée $L_{0...n}$.

16.2.2. Étude statique de la liaison équivalente

La chaîne ouverte est soumise à son extrémité (S_n) à des efforts caractérisés par le torseur statique $T_s^{e \rightarrow S_n}$. L'écriture de l'équilibre du solide S_n s'écrit :

$$T_s^{S_{n-1} \rightarrow S_n} + T_s^{e \rightarrow S_n} = 0 \quad (16.18)$$

L'écriture de l'équilibre du solide S_i s'écrit :

$$T_s^{S_{i-1} \rightarrow S_i} + T_s^{S_{i+1} \rightarrow S_i} = 0 \quad (16.19)$$

De ces équations, on peut écrire :

$$T_s^{S_i \rightarrow S_{i-1}} = \dots = T_s^{S_n \rightarrow S_{n-1}} = T_s^{e \rightarrow S_n} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \quad (16.20)$$

La relation ci-dessus permet d'écrire n équations torsorielles dont le second membre sera les 6 composantes de $T_s^{e \rightarrow S_n}$. Ces équations donneront un système de $6n$ équations scalaires.

Le rang de ce système est r_s . On démontre que $r_s = N_s$. On aura donc r_s équations principales, et $6n - r_s$ équation supplémentaires. Les équations supplémentaires permettent de trouver des éléments nuls, ou des relations entre les composantes de $T_s^{e \rightarrow S_n}$.

Comme $r_s = N_s$, la liaison équivalente $L_{0...n}$ est toujours isostatique.

16.2.3. Étude cinématique de la liaison équivalente

Le torseur cinématique $T_{c_{S_n/S_0}}$ associé à la la liaison équivalente $L_{0...n}$ se décompose de la manière suivante :

$$T_{c_{S_n/0}} = T_{c_{S_n/S_{n-1}}} + \cdots + T_{c_{S_i/S_{i-1}}} + \cdots + T_{c_{S_1/S_0}} \quad (16.21)$$

$$= \sum_{i=1}^n T_{c_{S_i/S_{i-1}}} \quad (16.22)$$

Cette équation permet d'écrire 6 équations scalaires. Ces équations contiennent les N_c inconnues cinématiques. La mobilité de la chaîne cinématique est $m_c = N_c$.

16.3. Mécanisme à chaîne fermée

16.3.1. Définition

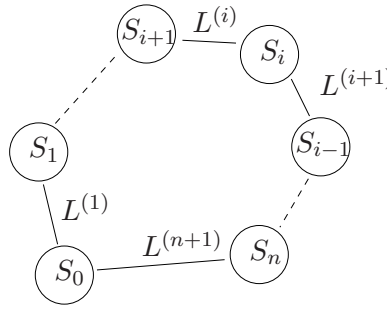


FIGURE 16.3.: Chaîne fermée.

Le cas de la chaîne fermée est similaire à celui de la chaîne ouverte à la différence suivante : le solide S_0 et le solide S_n sont reliés par la liaison $L^{(n+1)}$.

16.3.2. Loi d'entrée sortie

On appelle loi d'entrée sortie \mathcal{L} du mécanisme la ou les relations qui existent entre les composantes des torseurs cinématiques associées aux liaisons de la pièce d'entrée S_1 et la pièce de sortie S_n par rapport au bâti S_0 .

$$T_{c_{S_1/S_0}} = \mathcal{L} T_{c_{S_n/S_0}} \quad (16.23)$$

16.3.3. Étude cinématique

La relation entre les différents torseurs statiques associés aux $n + 1$ liaisons, s'écrit :

$$T_{c_{S_0/S_1}} + \cdots + T_{c_{S_{i-1}/S_i}} + \cdots + T_{c_{S_n/S_0}} = 0 \quad (16.24)$$

Cette relation permet d'écrire 6 équations faisant intervenir les N_c inconnues cinématiques. Ces équations permettent d'écrire un système linéaire à partir des inconnues cinématiques. On note r_c le rang de ce système. La mobilité de la chaîne fermée sera définie par :

$$m_c = N_c - r_c \quad (16.25)$$

16.3.4. Étude statique

Dans le cas général, l'équilibre du solide S_i s'écrit :

$$T_s^{S_{i-1} \rightarrow S_i} + T_s^{S_{i+1} \rightarrow S_i} + T_s^{e_i \rightarrow S_i} = 0 \quad (16.26)$$

En considérant les n solides, nous obtenons $6n$ équations contenant les N_s inconnues statiques. Ces équations permettent d'écrire un système linéaire à partir des inconnues statiques. On note r_s le rang de ce système. Le degré d'hyperstatisme de la structure sera définie par :

$$h = N_s - r_s \quad (16.27)$$

La loi d'entrée sortie et l'égalité entre la puissance transmise à l'entrée et à la sortie de la liaison permettent d'écrire un système d'équations algébriques. On démontre que ce système permet d'écrire la relation :

$$m_c = 6n - r_s \quad (16.28)$$

16.3.5. Bilan

Pour chaque liaison nous avons :

$$N_{s_i} + N_{c_i} = 6 \quad (16.29)$$

Pour les n liaisons, plus le bâti, nous aurons donc :

$$N_s + N_c = 6(n + 1) \quad (16.30)$$

Les équations 16.25, 16.27, 16.28, 16.30 permettent d'écrire :

$$h = m_c + 6 - N_c \quad (16.31)$$

$$= N_s - 6n + m_c \quad (16.32)$$

16.4. Mécanisme à chaîne complexe

16.4.1. Définitions

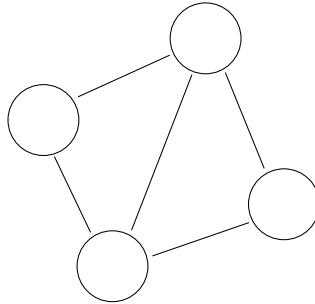


FIGURE 16.4.: Chaîne complexe.

Classes d'équivalences

L'ensemble des pièces d'un mécanisme qui n'ont pas de mouvement relatif entre elles, appartiennent à la même classe d'équivalence. On notera p le nombre de classes d'équivalences du mécanisme.

Graphe des liaisons

Les classes d'équivalence sont reliées par des liaisons. Les classes d'équivalence et les liaisons forment le graphe des liaisons. On notera l le nombre de liaisons.

Attention : Dans un graphe de liaison, on ne fait pas apparaître les liaisons en parallèle. Les liaisons en parallèle sont remplacées par leur liaison équivalente.

Cycles

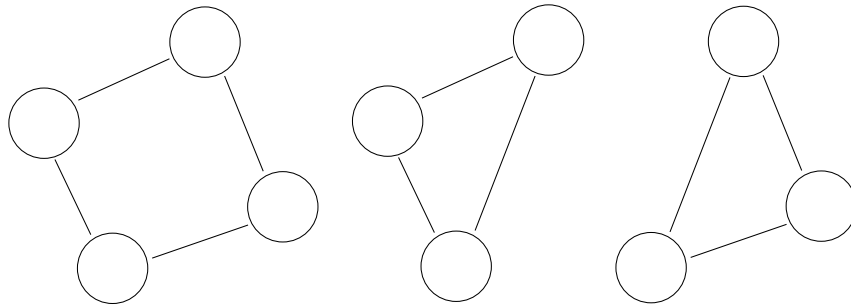


FIGURE 16.5.: Cycles.

Un graphe de liaison peut être décomposé en cycles. Un cycle est une chaîne continue fermée de liaisons qui ne contient pas deux fois la même classe d'équivalence.

Il est possible à partir d'un nombre minimal de cycles de former le graphe initial. Chacune de ces compositions de cycle, forme la base des cycles de graphe.

Le nombre cyclomatique γ est le nombre de cycles indépendants du graphe. C'est le nombre minimal de cycles nécessaires pour former le graphe. Nous avons :

$$\gamma = l - p + 1 \quad (16.33)$$

16.4.2. Étude cinématique

Pour chaque cycle, nous pouvons réaliser une étude cinématique similaire à celle d'une chaîne fermée (voir §16.3.3, p 79). Pour chaque cycle, nous allons obtenir un système de 6 équations contenant les inconnues statiques présentes dans le cycle.

Pour l'ensemble des γ cycles, nous allons donc obtenir un système linéaire de 6γ équations faisant intervenir l'ensemble des inconnues statiques du système mécanique. Le rang du système linéaire sera noté r_c et le nombre d'inconnues statique sera noté N_c .

La mobilité cinématique de la chaîne est définie par :

$$m_c = N_c - r_c \quad (16.34)$$

16.4.3. Étude statique

L'étude statique est réalisée en écrivant l'équilibre de chaque classe d'équivalence, en excluant la classe rattachée au bâti. Pour la classe d'équivalence S_i nous allons avoir une équation du type :

$$\sum_{l_i} T_s^{L(l_i) \rightarrow S_i} + T_s^{e_i \rightarrow S_i} = 0 \quad (16.35)$$

avec l_i le nombre de liaisons attachées à la classe d'équivalence S_i , et $T_s^{e_i \rightarrow S_i}$ le torseur des actions extérieures sur S_i . Cette relation va nous donner un système linéaire de 6 équations.

L'étude statique globale donnera un système linéaire de $6(p-1)$ équations faisant intervenir les N_s inconnues statiques. Le rang de ce système d'équations sera noté r_s .

Le degré d'hyperstatisme sera défini par :

$$h = N_s - r_s \quad (16.36)$$

Par analogie avec l'équation 16.28, nous écrivons :

$$m_c = 6(p-1) - r_s \quad (16.37)$$

16.4.4. Bilan

Pour chaque liaison, nous avons :

$$N_{s_i} + N_{c_i} = 6 \quad (16.38)$$

Pour les l liaisons nous avons :

$$N_s + N_c = 6l \quad (16.39)$$

Les équations 16.34, 16.36, 16.37, 16.39 permettent d'écrire :

$$h = m_c + 6\gamma - N_c \quad (16.40)$$

$$= N_s - 6(p-1) + m_c \quad (16.41)$$

Bibliographie

- [1] P Agati, Y Brémont, and G Delville. *Mécanique du solide. Applications industrielles*. Dunod, 2000.
- [2] P Agati and M Rossetto. *Liaisons et mécanismes*. Dunod, 1994.
- [3] Pierre Joyot. *Eléments de mathématiques pour la mécanique générale*. Cours ESTIA, 2000.
- [4] Robert Lassia. *Cinématique. Mécanique générale des solides indéformable*. Ellipses, 2000.