Nom: Prenom:

Examen de modélisation des mécanismes.

Durée : 1h30

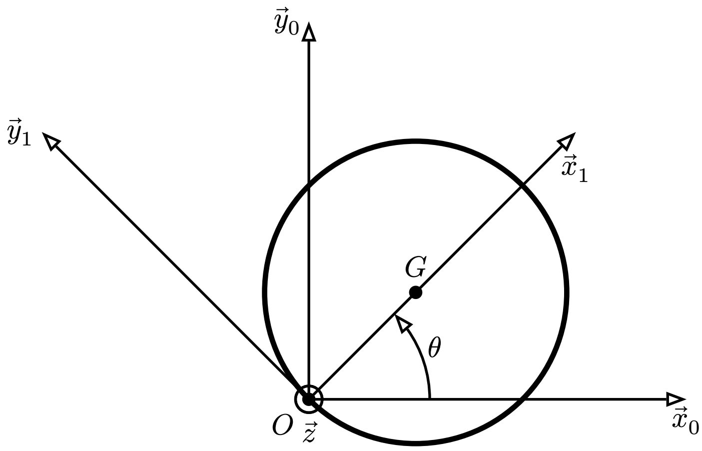
Autorisés : Documents personnels

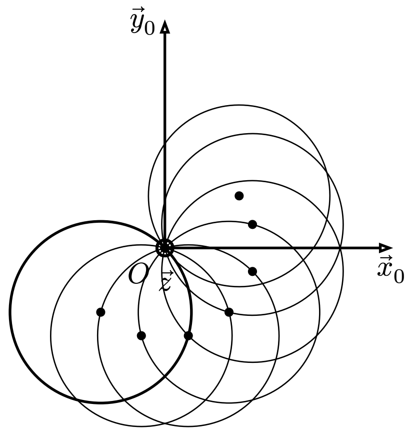
Interdits : Ordinateur, Smartphone

Pierre JOYOT, Naoures JLASSI, Fabien SIMONNAU

Novembre 2024

ATTENTION : Les réponses sont à rédiger sur cette feuille





Un disque de rayon R, d'épaisseur e peut tourner autour d'une liaison pivot de centre O et d'axe $\vec{z}$. On notera m la masse du disque, il est constitué d'un matériau de masse volumique ρ.

Le point G est le centre de gravité du disque. L'inertie du disque autour de l'axe $(G, \vec{z})$ est $I_z = m\frac{R^2}{2}$

La figure de gauche représente le mécanisme et celle de droite le mouvement du disque au cours du temps.

Le repère $R_1 = (O, B_1)$, avec $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$, est attaché au disque.

Le repère $R_0 = (O, B_0)$, avec $B_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ est considéré galiléen.

Cinématique

1. Exprimer $\vec{x}_1$ dans la base B_0

$$\vec{x}_1 = \cos(\theta)\vec{x}_0 + \sin(\theta)\vec{y}_0$$

2. Exprimer $\vec{y}_1$ dans la base B_0

$$\vec{y}_1 = -\sin(\theta)\vec{x}_0 + \cos(\theta)\vec{y}_0$$

3. Exprimer $\frac{d}{dt}\vec{x}_1\Big|_0$ dans la base B_0 puis dans la base B_1

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_1\Big|_0 = \dot{\theta}(-\sin(\theta)\vec{x}_0 + \cos(\theta)\vec{y}_0) = \dot{\theta}\vec{y}_1$$

4. Exprimer $\frac{d}{dt}\vec{y}_1\Big|_0$ dans la base B_0 puis dans la base B_1

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{y}_1\right|_0 = -\dot{\theta}(\cos(\theta)\vec{x}_0 + \sin(\theta)\vec{y}_0) = -\dot{\theta}\vec{x}_1$$

5. Exprimer $\vec{\Omega}_{1/0}$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\vec{z}$$

6. Exprimer $\vec{V}_{O\in 1/0}$ puis $\vec{V}_{G\in 1/0}$ en utilisant la formule des moments (babar)

$$\vec{V}_{O\in 1/0} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_{G\in 1/0} &= \vec{V}_{O\in 1/0} + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} \\ &= -R\vec{x}_1 \wedge \dot{\theta}\vec{z} = R\dot{\theta}\vec{y}_1\end{aligned}$$

7. Exprimer $\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_0$

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_0 = (\cos(\theta)\vec{x}_0 + \sin(\theta)\vec{y}_0) \wedge \vec{y}_0 = \cos(\theta)\vec{z}$$

8. Exprimer $\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1$

$$\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_1 = \vec{y}_0 \cdot (\cos(\theta)\vec{x}_0 + \sin(\theta)\vec{y}_0) = \sin(\theta)$$

9. Exprimer $\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_1$

$$\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_1 = \vec{y}_0 \cdot (-\sin(\theta)\vec{x}_0 + \cos(\theta)\vec{y}_0) = \cos(\theta)$$

Statique

1. Exprimer le torseur statique exercé par le poids sur le disque. Le poids est dirigé suivant $-\vec{y}_0$. On exprimera ce torseur en G et en O

$$T_s^{\text{poids} \to \text{disque}} = {}_G\begin{cases}-mg\vec{y}_0 \\ \vec{0}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M}_{O\text{ poids}} &= \overrightarrow{M}_{G\text{ poids}} + \overrightarrow{OG} \wedge (-mg\vec{y}_0) \\ &= \vec{0} + R\vec{x}_1 \wedge (-mg\vec{y}_0) = -mgR\cos(\theta)\vec{z}\end{aligned}$$

$$T_s^{\text{poids} \to \text{disque}} = {}_O\begin{cases}-mg\vec{y}_0 \\ -mgR\cos(\theta)\vec{z}\end{cases}$$

2. Exprimer le torseur statique exercé par le pivot sur le disque. On décomposera la force dans B_1 soit $F_x\vec{x}_1 + F_y\vec{y}_1$

$$T_s^{\text{pivot} \to \text{disque}} = {}_O\begin{cases}F_x\vec{x}_1 + F_y\vec{y}_1 \\ \vec{0}\end{cases}$$

3. Exprimer la somme de ces torseurs au point O

$$T_s^{\text{poids+pivot} \to \text{disque}} = {}_O\begin{cases}F_x\vec{x}_1 + F_y\vec{y}_1 - mg\vec{y}_0 \\ -mgR\cos(\theta)\vec{z}\end{cases}$$

Cinétique

1. Donner le volume V du disque et exprimer sa masse m en fonction de R, e, ρ. Exprimer I_z en fonction de R, e, ρ.

$$V = \pi R^2 e$$

$$m = \pi \rho R^2 e$$

$$I_z = m\frac{R^2}{2} = \pi \rho R^2 e \frac{R^2}{2} = \pi \rho e \frac{R^4}{2}$$

2. Donner la matrice d'inertie du disque exprimée au point G dans la base B_1. Les termes non nuls seront indiqués par une variable de votre choix.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(G,B_1)}$$

3. Exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}_{G1/0}$ du disque au point G par rapport à la base B_0. Exprimer le torseur cinétique du disque au point G par rapport à la base B_0.

$$\vec{\sigma}_{G1/0} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(G,B_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\frac{R^2}{2}\dot{\theta} \end{pmatrix}_{B_1} = m\frac{R^2}{2}\dot{\theta}\vec{z}$$

$$T^{\mathrm{ci}}_{1/0} = \underset{G}{\begin{cases} mR\dot{\theta}\vec{y}_1 \\ m\frac{R^2}{2}\dot{\theta}\vec{z} \end{cases}}$$

4. Exprimer le torseur cinétique du disque au point O par rapport à la base B_0.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O1/0} &= \vec{\sigma}_{G1/0} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}_{G\in 1/0} \\ &= m\frac{R^2}{2}\dot{\theta}\vec{z} + R\vec{x}_1 \wedge mR\dot{\theta}\vec{y}_1 \\ &= m\frac{R^2}{2}\dot{\theta}\vec{z} + mR^2\dot{\theta}\vec{z} = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\vec{z} \end{aligned}$$

$$T^{\mathrm{ci}}_{1/0} = \underset{O}{\begin{cases} mR\dot{\theta}\vec{y}_1 \\ \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\vec{z} \end{cases}}$$

Dynamique

1. Exprimer l'accélération $\vec{\Gamma}_{G\in 1/0}$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{G\in 1/0} &= \left.\frac{d}{dt}\vec{V}_{G\in 1/0}\right|_0 \\ &= R\left.\frac{d}{dt}\dot{\theta}\vec{y}_1\right|_0 \\ &= R\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right) \end{aligned}$$

2. Exprimer le torseur dynamique du disque au point G par rapport à la base B_0.

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{G1/0} &= \left.\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{G1/0}\right|_0 \\ &= m\frac{R^2}{2}\ddot{\theta}\vec{z} \end{aligned}$$

$$T_{1/0}^{\text{dy}} = \underset{G}{\begin{cases} mR\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right) \\ m\frac{R^2}{2}\ddot{\theta}\vec{z} \end{cases}}$$

3. Exprimer le torseur dynamique du disque au point O par rapport à la base B_0.

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{O1/0} &= \vec{\delta}_{G1/0} + \overrightarrow{OG} \wedge mR\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right) \\ &= m\frac{R^2}{2}\ddot{\theta}\vec{z} + R\vec{x}_1 \wedge mR\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right) \\ &= m\frac{R^2}{2}\ddot{\theta}\vec{z} + mR^2\ddot{\theta}\vec{z} \\ &= \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\vec{z}\end{aligned}$$

$$T_{1/0}^{\text{dy}} = \underset{O}{\begin{cases} mR\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right) \\ \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\vec{z} \end{cases}}$$

Equilibre dynamique

1. Donner les trois équations caractérisant l'équilibre dynamique par projection dans la base B_1

$$T_s^{\text{poids+pivot} \to \text{disque}} = T_{1/0}^{\text{dy}}$$

$$\underset{O}{\begin{cases} F_x\vec{x}_1 + F_y\vec{y}_1 - mg\vec{y}_0 \\ -mgR\cos(\theta)\vec{z} \end{cases}} = \underset{O}{\begin{cases} mR\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right) \\ \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\vec{z} \end{cases}}$$

projection sur $\vec{z}$

$$-mgR\cos(\theta) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}$$

$$g\cos(\theta) + \frac{3}{2}R\ddot{\theta} = 0$$

projection sur $\vec{x}_1$

$$\left(F_x\vec{x}_1 + F_y\vec{y}_1 - mg\vec{y}_0\right)\cdot\vec{x}_1 = mR\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right)\cdot\vec{x}_1$$

$$F_x - mg\sin(\theta) = -mR\dot{\theta}^2$$

projection sur $\vec{y}_1$

$$\left(F_x\vec{x}_1 + F_y\vec{y}_1 - mg\vec{y}_0\right)\cdot\vec{y}_1 = mR\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right)\cdot\vec{y}_1$$

$$F_y - mg\cos(\theta) = mR\ddot{\theta}$$

2. Sous quelle condition ces trois équations peuvent être résolue de manière analytique. Donner la forme simplifiée des équations. Donner la pulsation du pendule.

Prenons, par exemple, $\theta = -\frac{\pi}{2} + \alpha$ avec α petit. Dans ce cas nous avons de petites oscillations outour d'une position d'équilibre.

Dans ce cas $\cos(\theta) = \sin(\alpha) \approx \alpha$ et $\sin(\theta) = -\cos(\alpha) \approx -1$

Les équations d'équilibre dynamique deviennent

$$\begin{cases} F_x + mg = -mR\dot{\alpha}^2 \\ F_y - mg\alpha = mR\ddot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} + \frac{2}{3}\frac{g}{R}\alpha = 0 \end{cases}$$

La pulsation est $\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R}}$